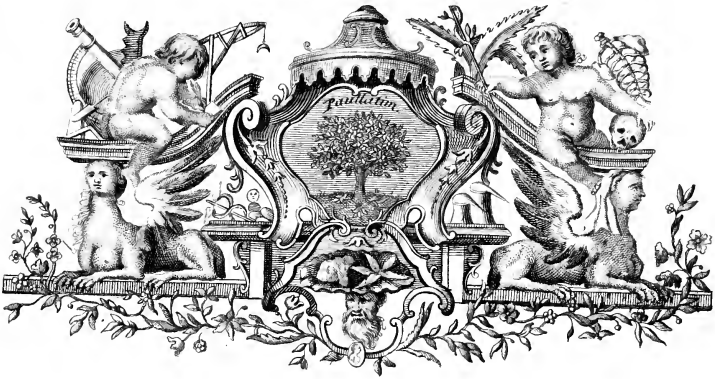
COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

Tomus XII.

AD ANNVM MDCCXL.



PETROPOLI.
TYPIS ACADEMIAE
cIↄ Iↄ cc L.

INDEX
COMMENTARIORVM.

In Claſſe Mathematica

In Claſſe Phyſica

C. E.

Obseru. Astronom.

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA

INVESTIGATIO CVRVARVM QVAE EVOLVTAE SVI SIMILES PRODVCVNT

A. L. Eulero.

§. 1.

In hac dissertatione nomini euolutarum aliquanto latiorem significationem tribuo, quam vulgo fieri solet, ac non solum eam curuam, ex cuius euolutione data curua nascitur, huius euolutam appello, sed insuper euolutam huius euolutae, similiterque vniuersam curuarum seriem, quarum quaelibet praecedentis est euoluta; interim tamen hoc discrimen in denominatione obseruabo, vt ipsam datae curuae euolutam, quae hoc nomine insigniri consueuit, eius euolutam primam appellem, huius vero euolutam secundam, eamque ex cuius euolutione ista nascitur, tertiam atque ita porro. Sic si datae curuae A euoluta sit curua B, curuae autem B euoluta C, atque huius curuae C euoluta D, huiusque E et ita deinceps, erit mihi respectu curuae A curua B euoluta prima, curua C euoluta secunda, curua D euoluta tertia, E quarta atque ita porro. Tab. I.

§. 2. Hac vocis euolutae significatione praemissa in hac dissertatione in eas curuas inquirere constitui, quarum euolutae vel primae vel secundae vel tertiae etc. ipsis sint similes. Quod quidem ad euolutas primas attinet a Viro Clarissimo Prof. Krafft iam est ostensum, praeter spiralem logarithmicam et cycloidem alias non dari curuas, quae cum suis euolutis primis conueniant; atque idem alia methodo hic sum demonstraturus, quae simul viam praeparet ad eas curuas inuestigandas, quae similes sint suis euolutis

lutis

lutis vel ſecundis vel tertiis, etc. Neque vero in hoc negotio viam ſimpliciſſimam ſum ſecuturus, quae facillime ad cognitionem curuarum quaeſitarum manuducat; ſed praecipue mihi propoſitum eſt relationem inter arcum curvae et reſpondentem radium curuedinis inueſtigare, quae etſi differentialibus altiorum graduum eſt inuoluta, quae alia methodo plerumque euitari poſſunt, tamen magis videtur genuina atque ad inſtitutum accommodata. Praeterea vero non tam ſollicitus ero de ipſis his curuis definiendis quam de ratione aequationes differentiales altiorum graduum debito modo tractandi, ex iisque curuas, ad quas pertineant aſſignandi. Eum ſcilicet in finem hoc negotium potiſſimum ſuſcepi, vt varias vias aequationum differentialium altiorum graduum reſoluendarum patefacerem, quae in plurimis aliis caſibus vtilitatem non contemnendam afferre queant.

§. 3. Initium igitur facio ab iis curuis inueſtigandis Fig. 1. quae ſimiles ſint ſuis euolutis primis, quae quaeſtio duplicem requirit ſolutionem. Primo enim, ſi curua quaeſita ponatur AMB, cuius euoluta ſit *amb*, quaeſtioni ſatisfiet, ſi curua *amb* ita fuerit ſimilis curuae AMB, vt punctum *a* homologum ſit puncto A, *b* homologum puncto B, atque quoduis punctum *m* homologum illi puncto M, ex cuius euolutione naſcitur. Hoc enim ipſa natura euolutionis et ſimilitudinis poſtulat, ſi enim punctum *a* homologum fuerit puncto A, atque curua *amb* ſimilis curuae AMB: arcui cuiuis AM ſimilis erit arcus *am*, qui eſt aeque amplus, hoc eſt qui ductis normalibus ad curuas AN, MN, *an*, *mn*, angulum complectitur *anm* aequalem angulo ANM: haec vero aequalitas locum habet, ſi normalis MN producta tangat curuam *am* in *m*, ſeu *m* fuerit cen-

centrum circuli osculantis curuam AMB in M. Cum igitur quaestionem hoc modo considerando quaelibet curuae AMB portio similis sit sui euolutae, hanc quaestionis partem ita restringi conueniet, vt in ea quaerantur curuae, quae suis euolutis sint *directe* similes, hocque modo istam partem quaestionis ab altera parte distinguo, qua curuae quaeruntur, quae suis euolutis *inuerse* sint similes.

§. 4. Inuersam autem similitudinem, qua alter quaestionis casus continetur, ita animo repraesentari oportet. Fig 2. Curua scilicet AMB ita similis esse potest suae euolutae bma, vt modo inuerso punctum b, quod ratione euolutionis puncto A respondet homologum sit alteri extremitati B, punctum a ratione euolutionis puncto B respondens homologum puncto A; ideoque curua tota $ameb$ similis curuae AEMB. Quare si ducantur normales AC, BC, ac et bc, erit primo ex euolutionis quidem natura angulus $bca =$ ang. ACB, deinde $AC:BC = ac:bc$. Ducatur nunc in puncto quocunque M radius osculi Mm euolutam in m tangens, erit punctum m ita comparatum vt normalis mn cum bc producta angulum constituat aequalem angulo ANM, ex quo inter puncta M et m ista relatio intercedet, vt summa angulorum $ANM + anm$ quos normales in M et m cum axibus AC et ac constituunt perpetuo aequalis sit angulo ACB. Quodsi ergo in curua ab capiatur punctum μ homologum ipsi M, et ad μ normalis ducatur $\mu\nu$: erit summa angulorum $a\nu\mu + anm = acb$. Dabitur igitur casus, quo duo puncta m et μ conueniunt puta in e, id quod accidit, vbi angulus afe est semissis anguli ACB, hocque punctum e

 erit

erit homologum ipſi puncto E cui ratione euolutionis reſpondet.

§. 5. Notatis itaque in vtraque curua punctis E et *e*, quae ſimul ratione ſimilitudinis ſunt homologa, atque ratione euolutionis ſibi mutuo reſpondent, reliqua puncta homologa omnia ratione euolutionis a ſe inuicem discrepabunt; ita punctum *m* ratione euolutionis reſpondet in curua A M B illi puncto M quod homologum eſt puncto μ, amboque puncta *m* et μ vtrinque circa punctum fixum *e* ita erunt diſpoſita, vt ductis normalibus $\mu\nu$ et *mn* ſumma angulorum $anm + a\nu\mu$ aequalis ſit angulo *acb*, vel duplo angulo *afe*. Quare ſi normales $\mu\nu$ et *mn* producantur, donec concurrant cum normali fixa *ef* producta in *p* et *r*, erunt anguli *mre* et $\mu\rho e$ aequales, arcusque *em* et $e\mu$ aeque ampli, eam huic vocabulo ſignificationem tribuendo, qua vſus eſt Celeb. Bernoullius in diſſertatione de motu reptorio: atque haec eſt proprietas binorum quorumque punctorum *m* et μ in euoluta, quorum alterum ex alterius puncto homologo per euolutionem naſcitur, haecque proprietas non ſolum communis eſt euolutis primis ſed etiam ſecundis, tertiis et omnibus ſequentibus.

§. 6. Si ergo quaeſtio de curua inuenienda proponatur, quae ſimilis ſit cuicunque euolutae, ea quaeſtio bipartito eſt tractanda, primo enim ea curua debet definiri, quae ſuae euolutae deſignatae directe ſit ſimilis, hoc eſt cuius ſingula puncta ratione euolutionis in euoluta generent puncta homologa. In altera vero ſolutionis parte in eas curuas erit inquirendum, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ordine inuerſo, hoc eſt, quarum ſingula puncta non generent

ſibi

ſibi homologa per euolutionem. Notandum autem eſt binorum horum caſuum poſteriorem ad priorem reduci, nam ſi curua AMB euolutam habeat *bma* ſibi inverſe ſimilem, eius euoluta ſecunda eidem erit directe ſimilis; ſi enim punctum M generet in euoluta prima punctum *m* ſibi non homologum, idem in euoluta ſecunda generabit punctum ſibi homologum. Simili modo, quae curua habet euolutam ſecundam ſibi ſimilem inuerſe, eadem habebit euolutam quartam ſibi directe ſimilem; ſimiliterque erit comparata ratio euolutarum reliquorum graduum. Fig. 2.

§. 7. Antequam autem ſolutionem horum problematum aggrediar, generalem nexum, quem quaeuis curua cum ſuis euolutis cuiusque ordinis tenet, conſideraſſe iuuabit. Sit igitur propoſita curua quaecunque A M cuius euoluta prima ſit B N, ſecunda euoluta C P, tertia D Q, quarta E R et ita porro; erunt ex natura euolutionis omnes arcus AM, BN, CP, DQ, ect. aeque ampli. Quare ſi in ipſa curua propoſita AM ponatur arcus $AM = s$; et radius oſculi $MN = r$; erit pro euoluta prima BN arcus $BN = a \pm r$ prout radius oſculi MN recedendo a puncto A *vel* creſcit vel decreſcit: ſecundum autem figuram eſt curua $BN = a + r$. Ob aequalem autem amplitudinem eſt euolutae primae radius oſculi $NP = \frac{rdr}{ds}$ hinc porro euolutae ſecundae CP eſt arcus $CP = b - \frac{rdr}{ds}$ ſiquidem figuram ſequamur: eiusdemque radius oſculi $PQ = -\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$. Euolutae itaque tertiae arcus DQ eſt $= c + \frac{r}{ds}.d\frac{rdr}{ds}$, eiusque radius oſculi $QR = \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$. Simili modo euolutae quartae ER eſt arcus $ER = e + \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$ atque eiusdem radius oſculi $= \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$, hocque pa- Fig. 3.

cto

cto pro qualibet datae curuae euoluta facile erit tum arcum ratione euolutionis dato arcui s in data curua respondentem assignare, tum etiam radium osculi; hae vero singulae expressiones tam affirmatiue sunt accipiendae quam, negatiue, siquidem solutiones problematum proponendorum latissime patentes desideramus.

§. 8. Proponatur igitur ex isto quaestionum genere problema primum, quod ita se habet

Fig. 1. *Inuenire curuam AMB quae suae euolutae primae* abm *directe sit similis.*

Ponatur pro curua quaesita AMB arcus ad lubitum assumtus $AM = s$, et radius osculi in puncto $M = r$, crescantque radii osculi ab A versus B recedendo, qua quidem conditione amplitudo problematis non restringitur, cum initium A, a quo arcus AM computantur vbi libuerit, accipi queat. Sit radius osculi in A seu $Aa = a$, et quia curua amb directe similis esse debet curuae AMB, erit arcus $am = ns$ et radius osculi euolutae in $m = ns$. Hanc ob rem ex natura euolutionis erit vel $a + ns = r$ vel $nr = \frac{rdr}{ds}$, quae ambae aequationes congruunt. Erit ergo pro curua quaesita AM haec aequatio $s = \frac{r-a}{n}$; et quia arcus data quantitate augeri diminuiue potest ob initium A arbitrarium, erit $s = \frac{r}{n}$ seu $r = ns$; quae aequatio exprimit naturam curuae, quae euolutam habet sui similem, existente similitudinis ratione vt $1 : n$, haec scilicet ratio exprimit rationem linearum ad curuam quaesitam pertinentium ad lineas homologas in euoluta.

§. 9. Quoniam autem ex aequatione, quae datur inter arcum et radium osculi, natura curuae non distincte perspicitur, etiamsi ex tali aequatione immediate curuae con-

constructio deduci queat, eliciamus ex aequatione inuenta $r = ns$ aequationem inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$ pro eadem curua quaesita AMB. Quum vero positus sit arcus $AM = s$, erit $dx^2 + dy^2 = ds^2$; atque si fiat $dx = pds$ et $dy = ds\sqrt{(1-pp)}$ erit curuae radius osculi $r = \frac{ds\sqrt{(1-pp)}}{dp}$. Hac itaque substitutione facta ista emergit aequatio $\frac{ds\sqrt{(1-pp)}}{dp} = ns$ seu $\frac{ndp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{s}$ cuius integrale est $n\,\text{A fin.}\ p = l\frac{s}{a}$, seu $p = \text{fin. A}\ \frac{1}{n} l\frac{s}{a}$, vnde fit $\sqrt{(1-pp)} = \text{cof. A}\ \frac{1}{n} l\frac{s}{a}$. Quapropter nanciscimur $dx = ds\ \text{fin. A}\frac{1}{n} l\frac{s}{a}$ et $dy = ds\ \text{cof. A}\ \frac{1}{n} l\frac{s}{a}$. Fig. 4.

§. 10. Ad has aequationes denuo integrandas sequens, notandum est lemma, quod in solutionibus sequentium problematum maximum afferet subsidium. Est scilicet:

$$\int ds\ \text{fin. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} = \frac{\beta s}{1+\beta}\ \text{fin. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} - \frac{\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}}{1+\beta}\ \text{cof. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}}$$

atque

$$\int ds\ \text{cof. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} = \frac{\beta s}{1+\beta}\ \text{cof. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} + \frac{\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}}{1+\beta}\ \text{fin. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}}$$

quae formulae vsum habent solo excepto casu, quo est $\beta = -1$. Hoc autem casu, quia est $\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-ss)}} = \text{A fin.}\frac{s}{\sqrt{\alpha}}$, erit $\text{fin. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-ss)}} = \frac{s}{\sqrt{\alpha}}$; hincque $\int ds\ \text{fin. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-ss)}} = \frac{ss}{2\sqrt{\alpha}}$, et $\int ds\ \text{cof. A}\ .\int\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-ss)}} = \int\frac{ds}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{(\alpha-ss)} = \frac{s\sqrt{(\alpha-ss)}}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\ \text{A cof.}\ \frac{s}{\sqrt{\alpha}}$.

§. 11. Quia nunc in nostro casu est $\frac{1}{n} l\frac{s}{\alpha} = \int\frac{ds}{ns}$ erit lemmate ad hunc casum accommodando, $\alpha = 0$, $\beta = nn$, quibus valoribus substitutis fit $x = \int ds\ \text{fin. A}\ .\int\frac{ds}{ns} = \frac{nns}{1+nn}$

$\frac{nns}{1+nn}$ fin. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} - \frac{ns}{1+nn}$ cof. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$ atque $y = \int ds$ cof. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} = \frac{nns}{1+nn}$ cof. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} + \frac{ns}{1+nn}$ fin. A . $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$: vbi in integrationibus nouis conſtantibus addendis non eſt opus, quia natura curuae non mutatur, quacunque quantitate coordinatae ſiue augeantur ſiue diminuantur. Ex his autem binis expreſſionibus, quibus coordinatae per eandem quantitatem s definiuntur, curua deſiderata ope logarithmorum et circuli poterit conſtrui; interim tamen iſta conſtructio ſatis eſt operoſa, aliaeque complures faciliores hinc deduci poſſunt.

§. 12. Vt autem ipſam curuam propius cognoſcamus, ſumamus aequationes inuentas pro coordinatis orthogonalibus:

$$x = \frac{nns}{1+nn} \text{ fin. A.} \frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} - \frac{ns}{1+nn} \text{ cof. A.} \frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$$
$$y = \frac{nns}{1+nn} \text{ cof. A.} \frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} + \frac{ns}{1+nn} \text{ fin. A.} \frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$$

ex quibus ſi ſinus et coſinus arcus $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$ eliminentur, prodit iſta aequatio $xx + yy = \frac{n^4 ss + nnss}{(1+nn)^2} = \frac{nnss}{1+nn}$, in qua $xx + yy$ exhibet quadratum chordae arcum s ſubtendentis; vnde curua quaeſita hanc habet proprietatem, vt omnes arcus ab initio A ſumti ad ſuas chordas datam teneant rationem, ex qua iam ſponte ſequitur curuam eſſe ſpiralem logarithmicam.

§. 13. Quoniam vero iam ſupra erat $dx = ds$ fin. A. $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$ et $dy = ds$ cof. A. $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a}$, erit fin. A. $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} = \frac{dx}{ds}$ et cof. A. $\frac{1}{n}\, l\frac{s}{a} = \frac{dy}{ds}$, ex quibus valoribus in aequationibus integratis ſubſtitutis emergent ſequentes aequationes:
$x\,ds = \frac{nnsdx - nsdy}{1+nn}$ et $y\,ds = \frac{nnsdy + nsdx}{nn+1}$ quarum illa per hanc diuiſa praebet iſtam $\frac{x}{y} = \frac{ndx - dy}{ndy + dx}$ ſeu $nxdy + xdx = nydx - ydy$

quae

quae adeo inter ſolas coordinatas, x et y continetur. Cum igitur ſit $n(y\,dx - x\,dy) = x\,dx + y\,dy$, diuidatur per $xx + yy$, quo facto integrale aequationis erit n A tang. $\frac{x}{y} = \frac{l\sqrt{(x^2+y^2)}}{a}$: ex qua admodum breuis et facilis conſtructio curuae quaeſitae conſequitur ope logarithmicae et circuli, quae eadem autem mox alia via eruetur. Interim ex hac conſtructione natura curuae quaeſitae, qua ea eſt ſpiralis logarithmica, non difficulter colligitur.

§. 14. Quodſi autem aequationem $xx + yy = \frac{nnss}{1+nn}$ euoluere velimus, facile intelligitur id commodiſſime fieri per relationem diſtantiae cuiusque puncti M a puncto fixo A ad perpendiculum quod ex A in tangentem in M demittitur. Sit igitur AM curua quaeſita, et ducta AM $= \sqrt{(xx+yy)} = z$, demittatur ex A in tangentem MT perpendiculum AT, ſitque AT $= p$ et MT $= t = \sqrt{(zz-pp)}$ erit ob triangula Mmn, MAT ſimilia, et $mn = dz$, elementum arcus M$m = ds = \frac{zdz}{t}$. At aequatio inuenta praebet $ss = \frac{(1+nn)zz}{nn}$ et $s = \frac{z}{n}\sqrt{(1+nn)}$ hincque $ds = \frac{dz}{n}\sqrt{(1+nn)} = \frac{zdz}{t}$ vbi, cum commode accidat vt per dz diuidi queat aequatio, habetur ſtatim aequatio in terminis finitis $t\sqrt{(1+nn)} = nz$ ſeu $\frac{t}{z} = \frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}$ et $\frac{p}{z} = \frac{1}{\sqrt{(1+nn)}}$. Cognoſcitur igitur angulum TMA, quem curuae tangens cum recta AM conſtituit vbique eſſe eundem ideoquae conſtantem, quo ipſo logarithmica ſpiralis ſolet definiri: anguli vero huius conſtantis AMT tangens eſt $= \frac{p}{t} = \frac{1}{n}$. fig. 5.

§. 15. Quodſi ad curuam conſtruendam centro A deſcribamus circulum arbitrarii radii AF $= 1$ arcumque a puncto fixo F ſumtum, FS ponamus $= q$; erit ob S$s = dq$, M$n = zdq$, et $dz : zdq = t : p = n : 1$: vnde obtinetur dz

 $= n$

$= nzdq$ et $ndq = \frac{dz}{z}$, quae integrata dat $nq = l\frac{z}{a}$ ex qua aequatione intelligitur, quanta ſit recta AM, quae per quodque punctum S traducitur, haecque ſimul eſt conſtructio, quae ex aequatione integrali §. 13. data conſequitur: arcus ſcilicet circuli FS exprimunt logarithmos radiorum AM, hancque ob cauſam iſta curua vocata eſt logarithmica ſpiralis.

Fig. 2. §. 16. Progrediamur ad problema ſecundum, quod ita ſe habet:

Inuenire curuam AMB *quae ſuae euolutae bma inuerſe ſit ſimilis.*

Ad curuam AB ducatur primum is radius oſculi Ee, qui euolutam in puncto e homologo ipſi E tangat, ſitque hic radius oſculi E$e = a$; a puncto nunc hoc E computetur arcus EM $= s$, et ponatur radius oſculi M$m = r$, qui euolutam tanget in m, eritque arcus $em = r - a$. Iam in euoluta ſumatur punctum μ homologum puncto M, poſitaque ratione ſimilitudinis curuae quaeſitae ad ſuam euolutam $= 1 : n$, erit arcus $e\mu = ns$ et radius oſculi in $\mu = nr$. Nunc ex μ ducatur tangens μR quae ſimul erit radius oſculi curuae AMB in R, puncto ipſi m homologo. Ponatur arcus ER $=$ S et radius oſculi R$\mu =$ R, erit $e\mu = a -$ R; atque $em = n$S et radius oſculi in $m = n$R.

§. 17. Hinc itaque obtinentur ſequentes aequationes; prima ſcilicet $em = r - a = n\mathrm{S}$, ſecunda $e\mu = a - \mathrm{R} = ns$, ex quibus elicitur $\mathrm{S} = \frac{r-a}{n}$, et $\mathrm{R} = a - n\mathrm{S}$. At quia arcus EM et ER ſunt aeque ampli, erit $\frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{R}} = \frac{dr}{na - nns} = \frac{ds}{r}$, hincque $rds = nads - nnsds$ et integrando $rr = 2nas - nnss + aa$ eiusmodi addita conſtante vt poſito $s = 0$ fiat $r = a$.

$r = a$, vti aſſumſimus. Ponamus autem ns loco $ns - a$, ſeu initium, a quo arcus menſuramus, mutemus in alium locum B exiſtente $BE = \frac{a}{n}$, quo pacto natura curuae nil mutatur, habebimus $rr = 2aa - nnss$, et $r = \sqrt{(2aa - nnss)}$. Ex qua aequatione ſi curua fuerit determinata, punctum E circa quod arcus aeque ampli ſunt abſcindendi, vt prodeat curua ſuae euolutae inuerſe ſimilis, ibi eſt ſumendum vbi ſit radius oſculi $r = a$: id quod eueniet ſi ab initio nunc capto abſcindamus arcum $s = \frac{a}{n}$.

§. 18. Quaeramus aequationem inter coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$, ſitque $dx = pds$ et $dy = ds\sqrt{(1 - pp)}$ erit radius oſculi in M, ſcilicet $r = \frac{ds\sqrt{(1-pp)}}{dp}$, vnde obtinetur iſta aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ quae integrata dat A ſin. $p = \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{1}{n}$ A ſin. $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$, ſi quidem axem AP in A ad curuam normalem ponimus. Niſi autem ſit $n = 1$, quo caſu euoluta curuae quaeſitae non ſolum ſit ſimilis ſed etiam aequalis, praeſtabit formam $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ retinere, ne calculus multiplicatione arcuum implicetur. Si enim expreſſionem $\frac{1}{n}$ A. ſin. $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ ſumeremus, foret $p =$ ſin. A. $\frac{1}{n}$ A ſin. $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ quae expreſſio, niſi $\frac{1}{n}$ ſit numerus integer ad computum accommodate exhiberi non poteſt. Fig. 4.

§. 19. Euoluamus igitur primum caſum quo $n = 1$ ſeu curuam quaeramus, quae ſuae euolutae primae inuerſe ſimilis ſit et aequalis: erit igitur pro hac curua A ſin. $p =$ A ſin. $\frac{s}{a\sqrt{2}}$ ſeu $p = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ et $\sqrt{(1 - pp)} = \frac{\sqrt{(2aa-ss)}}{a\sqrt{2}}$. Hinc itaque obtinetur $dx = pds = \frac{sds}{a\sqrt{2}}$ atque integrando $2ax\sqrt{2} = ss$, quae aequatio indicat curuam quaeſitam eſſe cycloidem vulgarem, minimam curuedinem in puncto A et rectam AP pro dia-

 metro

metro habentem. Punctum vero E in curua hac, vbi radius osculi $= a$ respondet abscissae $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, quod punctum in centrum circuli generatoris incidit; est enim diameter circuli generatoris $= \frac{a}{\sqrt{2}}$. Satisfacit igitur cyclois ordinaria huic quaestioni eo quidem modo, qui iam pridem constat, atque inter praecipuas cycloidis proprietates referri solet.

§. 20. Ad curuas iam definiendas quae suis euolutis primis inuerso modo sint saltem similes, vtamur hac aequatione $p =$ sin. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa+1^2ss)}}$, ex qua fluit ista $\sqrt{(1-pp)} =$ cos. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$. Erit itaque $dx = ds$ sin. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ et $dy = ds$ cos. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ quarum aequationum integralia per lemma §. 10. datum reperiuntur $x = \frac{nns}{nn-1}$ sin. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2a^2-n^2s^2)}} + \frac{\sqrt{(2a^2-n^2ss)}}{nn-1}$ cos. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ et $y = \frac{nns}{nn-1}$ cos. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} - \frac{\sqrt{(2aa-n^2ss)}}{nn-1}$ sin. A $. \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$. Cum igitur sit $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{1}{n}$ A. sin. $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$, intelligitur quoties fuerit n numerus rationalis, solo excepto casu $n = 1$, valores coordinatarum x et y algebraice per s posse exhiberi, indeque curuam quaesitam esse algebraicam.

§. 21. Si vtriusque expressionis quadrata inuicem addantur, prodibit haec aequatio $xx + yy = \frac{n^4ss+2aa-nnss}{(nn-1)^2}$: ex qua commode elicitur aequatio inter distantias cuiusuis

Fig. 6. puncti M a centro fixo C et perpendiculum CT, quod ex C in tangentem in M demittitur. Posito enim CM $= \sqrt{(xx+yy)} = z$, CT $= p$ et MT $= t = \sqrt{(zz-pp)}$ erit $ds = \frac{zdz}{t}$. Natura autem curuae exprimitur hac aequatione $zz = \frac{2aa}{(nn-1)^2} + \frac{nnss}{nn-1}$, quae praebet $s = \frac{1}{n}\sqrt{}$

$((nn$

$((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1})$ et $ds=\frac{(nn-1)zdz}{n\sqrt{((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1})}}=\frac{zdz}{t}=$ $\frac{zdz}{\sqrt{(zz-pp)}}$ quae diuisa per zdz et quadrata, suppeditat hanc $(nn-1)^2 zz-(nn-1)^2 pp=nn(nn-1)zz-\frac{2nnaa}{nn-1}$ seu $p=\sqrt{(\frac{2nnaa}{(nn-1)^3}-\frac{zz}{nn-1})}$ et $t=n\sqrt{(\frac{zz}{nn-1}-\frac{2aa}{(nn-1)^3})}$ Ducto autem ad M radio osculi $MR=r$, ob $ns=\sqrt{}$ $((nn-1)zz-\frac{2aa}{nn-1})$, erit $r=(nn-1)p$, et $s=\frac{(nn-1)t}{nn}$

§. 22. Initium ergo curuae, a quo arcus aestimantur incidit in punctum B, vbi recta CB ad curuam est normalis seu $t=0$, eritque recta $BC=\frac{a\sqrt{2}}{nn-1}$. Hoc igitur puncto B notato erit quiuis arcus $BM=s=\frac{(nn-1)t}{nn}$ seu erit $BM:MT=nn-1:nn$; et cum sit radius osculi $MR=r=(nn-1)p$, erit $MR:CT=nn-1:1$. Radius osculi itaque euanescet in puncto A, cuius tangens per C transit, eritque $AC=\frac{na\sqrt{2}}{nn-1}$. Describatur centro C radio $AC=\frac{na\sqrt{2}}{nn-1}$ circulus, et ponatur breuitatis gratia $\frac{na\sqrt{2}}{nn-1}=c$, seu $a=\frac{(nn-1)c}{n\sqrt{2}}$, erit $BD=c-\frac{c}{n}=\frac{(n-1)c}{n}$ ergo $CD:BD=n:n-1$. Porro in radium osculi productum demittatur perpendiculum $CQ=t=n\sqrt{(\frac{zz}{nn-1}-\frac{2aa}{(nn-1)^3})}$ erit ducto radio CN spatium $NQ=n\sqrt{(\frac{2nnaa}{(nn-1)^3}-\frac{zz}{nn-1})}=np=n\,.\,MQ$ hincque $MN=(n-1)p$. Quare cum sit $MR=r=(nn-1)p$, erit $MR:MN=n+1:1$: quia porro est $NQ:MN=n:n-1=CN:VN$ fiet $VN=\frac{(n-1)c}{n}=BD$: ex quo punctum M est in peripheria circuli tangentis circulum AD in N, cuius diameter est $NV=BD$.

§. 23. Ex his ergo proprietatibus manifesto consequitur curuam inuentam esse hypocycloidem ABa, genitam reuolutione circuli diametrum habentis BD $= \frac{(n-1)c}{n} = \frac{a\sqrt{2}}{n+1}$, super concauitate circuli maioris AD semidiametrum habentis CD $= c = \frac{(na\sqrt{2})}{nn-1}$; si quidem fuerit numerus n vnitate maior. At si n fuerit vnitate minor, curua satisfaciens erit Epicyclois ob valorem ipsius BD $= \frac{(n-1)c}{n}$ negatiuum, quae generetur reuolutione circuli super parte conuexa circuli ADC, existente ratione diametri circuli reuoluentis ad semidiametrum circuli quiescentis vt $1-n$ ad n: ex quo simul intelligitur; quoties fuerit n numerus rationalis vnitate excepta, curuam satisfacientem esse algebraicam.

§. 24. Pro hypocycloide igitur seu casu, quo $n > 1$, positis abscissa CP $= x$, applicata PM $= y$, et arcu BM $= s$ habetur ista aequatio $xx + yy = \frac{2aa}{(nn-1)^2} + \frac{nnss}{nn-1}$. At si ponatur abscissa BP $= u$, erit $x = u + \frac{a\sqrt{2}}{nn-1}$, atque inter u, y et s haec habebitur aequatio $yy + uu + \frac{2au\sqrt{2}}{nn-1} = \frac{nnss}{nn-1}$ seu $nnss = 2au\sqrt{2} + (nn-1)(uu+yy)$, ex qua sponte patet, casu $n = 1$ prodire cycloidem ordinariam, fit enim $ss = 2au\sqrt{2}$. Quodsi autem semidiameter circuli quiescentis CD ponatur $= c$, et diameter circuli voluti BD $= b$, erit $a = \frac{(nn-1)c}{n\sqrt{2}}$ et $b = \frac{(n-1)c}{n}$ erit $n = \frac{c}{c-b}$ et $a = \frac{2bc-bb}{(c-b)\sqrt{2}}$; vnde pro hypocycloide ABa haec oritur aequatio $ss = \frac{2b(c-b)(2c-b)u}{cc} + \frac{b(2c-b)(uu+yy)}{cc}$. Pro epycycloide vero ex iisdem circulis nata fit u negatiuum, atque ista habebitur aequatio $ss = \frac{2b(c+b)(2c+b)u}{cc} - \frac{b(2c+b)(uu+yy)}{cc}$.

§. 25.

§. 25. Vt autem aequationem inter coordinatas CP $= x$ et PM $= y$ obtineamus differentialem, saltem in qua non insit arcus s, ea ex aequationibus §. 20. datis eruetur: cum enim sit sin. A $.\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{dx}{ds}$ et cos. A $.\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}} = \frac{dy}{ds}$, erit $x\,ds = \frac{nnsdx + dy\sqrt{(2aa-nnss)}}{nn-1}$ et $y\,ds = \frac{nnsdy - dx\sqrt{(2aa-nnss)}}{nn-1}$ ex quibus eliminato arcu s, resultat sequens aequatio differentialis $\frac{2nnaads^2}{(nn-1)^2} = cc\,ds^2 = nn(xdy-ydx)^2 + (xdx+ydy)^2 = cc\,dx^2 + cc\,dy^2$ inter x et y tantum. Ad quam aequationem tractandam ponamus $\frac{y}{x} = v$ et $V(xx+yy) = z$, seu $x = \frac{z}{\sqrt{(1+v^2)}}$ et $y = \frac{vz}{\sqrt{(1+vv)}}$ erit $ds^2 = dz^2 + \frac{z^2dv^2}{(1+vv)^2}$; hisque substitutionibus factis peruenitur ad hanc aequationem $c^2dz^2 + \frac{ccz^2dv^2}{(1+vv)^2} = \frac{nnz^4dv^2}{(1+vv)^2} + zzdz^2$, quae porro reducitur ad hanc: $\frac{dv}{1+vv} = \frac{dz\sqrt{(cc-zz)}}{z\sqrt{(nnzz-cc)}}$. Ponatur porro $\frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{\sqrt{(cc-zz)}} = t$, seu $z = \frac{c\sqrt{(1+tt)}}{\sqrt{(nn+tt)}}$ fiet $\frac{dv}{1+vv} = \frac{dt}{1+tt} - \frac{dt}{nn+tt}$: atque integrando A tang $v =$ A tang. $t - \frac{1}{n}$ A tang $\frac{t}{n}$ seu n A tang. $\frac{t-v}{1+tv} =$ A tang. $\frac{t}{n}$; quae restitutis prioribus valoribus transmutatur in hanc n A tang. $\frac{x\sqrt{(nnzz-cc)} - y\sqrt{(cc-zz)}}{x\sqrt{(cc-zz)} + y\sqrt{(nnzz-cc)}} =$ A tang. $\frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{n\sqrt{(cc-cc)}}$ quae quoties n est numerus rationalis, fit algebraica. Cum autem his expressionibus ad figuram relatis sit $p = \frac{\sqrt{(cc-zz)}}{\sqrt{(nn-1)}}$ et CQ $=$ MT $= t = \frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{\sqrt{(nn-1)}}$, itemque NQ $= \frac{n\sqrt{(cc-zz)}}{\sqrt{(nn-1)}}$, erit n A tang. $\frac{tx-py}{px+ty} =$ A tang. $\frac{t}{\mathrm{NQ}}$ indeque n ang. BCT $=$ ang. TCV; ex quo erit ang. TCV : ang. TCB $= n : 1$ seu ang. TCV : ang. BCV $= n : n-1 =$ CD : BD. atque hinc quoque oritur BC : BD $=$ ang. BCT : ang. BCV $=$ arc. DX : DN. quae omnia cum receptis epicycloidum et hypocycloidum proprietatibus apprime conueniunt.

§. 26. Sic itaque definitae ſunt omnes curuae, quae ſuis euolutis primis tam directe quam inuerſe ſint ſimiles, priori ſcilicet caſu ſatisfaciunt omnes ſpirales logarithmicae, poſteriori vero omnis generis cycloides, quae communiter tam epicycloidum quam hypocycloidum nomine comprehendi ſolent. Manifeſtum autem eſt has easdem curuas omnibus quaeſtionibus ſequentibus ſatisfacere debere, quibus quaeruntur curuae, quae ſint ſimiles ſuis euolutis altioris cuiusdam gradus, ſiue directe ſiue inuerſe. Logarithmicae enim ſpirales ſuis euolutis cuiuscunque ordinis directe ſunt ſimiles, quia omnes euolutae manent logarithmicae ſpirales. Deinde omnes cycloides, quae ſuis evolutis primis inuerſe ſimiles eſſe repertae ſunt, ſuis euolutis ſecundis, quartis, ſextis omnibusque ordine paribus directe erunt ſimiles: euolutis vero tertiis, quintis, ſeptimis omnibusque ordine imparibus ſimiles erunt inuerſe. His vero iisdem quaeſtionibus innumerabiles aliae ſatisfacient curuae, eoque plures, quo ad vlteriores ordines procedatur: quarum curvarum ſatisfacientium vt plures ſpecies detegamus, quaeſtionem noſtram ad euolutas ſecundas accommodatam pertractabimus.

§. 27. Ad curuas igitur inueſtigandas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ſecundis, quaeſtio pro ſimilitudine directa et inuerſa bipartienda eſt: vnde primum hoc nobis problema erit reſoluendum.

Fig. 7. *Inuenire curuas quae ſuis euolutis ſecundis directe ſint ſimiles.*

Sit AM eiusmodi curua, quae problemati ſatisfaciat, cuius initium ſumatur in puncto A, a quo verſus M recedendo radii oſculi creſcant. Sit igitur BN huius curuae euoluta,

luta, quae vel ita erit comparata, vt ab B ad N radii osculi crescant, sicuti figura repraesentat, vel decrescant, ex quo huius problematis duplex nascitur solutio. Ad priorem igitur, cui figura est accommodata, absoluendam ponatur curuae quaesitae AM arcus $AM = s$, radius osculi $MN = r$; erit eius euolutae BN arcus $BN = r - a$; radius osculi $Nm = \frac{rdr}{ds}$; atque euolutae secundae arcus $am = \frac{rdr}{ds} - b$; eiusque in m radius osculi $= \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$.

§. 28. Cum igitur curua am similis esse debeat directe curuae AM, erit eius arcus $am = ns$, et radius osculi $= nr$, vnde duplex nascitur aequatio $\frac{rdr}{ds} - b = ns$ et $nr = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$, quarum vtraque eodem redit. Sumamus itaque aequationem $\frac{rdr}{ds} = ns + b$, quae ob initium A arbitrarium transit in hanc $\frac{rdr}{ds} = ns$, quae integrata dat $rr = nss + aa$, ita vt curuae quaesitae AM radius osculi in initio A sit $= a$: circa hocque punctum A curva vtrinque habebit arcus similes et aequales. Ceterum apparet, si fiat $a = 0$, tum prodire aequationem pro spirali logarithmica, quam huic casui satis facere perspicuum est. Praeterea etiam hoc notari oportet in aequatione $rr = nss + aa$ constantem aa, quae per integrationem est inducta negatiue nullo pacto accipi posse, ne radius osculi r vsquam fiat imaginarius: omnis enim aequatio, quae inter arcum et radium osculi exhibetur, ita debet esse comparata, vt cuique arcui radius osculi realis respondeat, nisi forte curua alicubi in puncto quodam terminetur seu retrogrediatur, tum enim si curuae vltra id punctum constans longitudo addita concipiatur, per id interuallum radius osculi debet esse imaginarius.

fig. 4. §. 29. Quoniam itaque habemus hanc aequationem $rr = nss + aa$, erit $r = \sqrt{(aa + nss)}$. Confideremus nunc curuam quaefitam ad axem AP relatam, fitque abfciffa $AP = x$, applicata $PM = y$, et ponatur $dx = pds$ et $dy = ds\sqrt{(1-pp)}$ erit radius ofculi $r = \frac{ds\sqrt{(1-pp)}}{dp} = \sqrt{(aa + nss)}$: hincque $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(nss+aa)}}$. Quodfi autem huius curuae euolutae primae arcus ponatur $= S$ et radius ofculi $= R$, erit $S = r$, et $R = \frac{rdr}{ds} = ns$ ex quo pro euoluta prima ifta emergit aequatio $RR = nSS - naa$, quae ergo curua in puncto quopiam terminabitur, vltra quod curuae adiecta eft longitudo $= a$. Quare fi in aequatione pro curua quaefita ponamus $-naa$ loco aa fimul prodibit aequatio pro euoluta prima, quae adeo pariter problemati fatisfaciet, fuamque euolutam fecundam fibi directe habebit fimilem.

§. 30. Cum itaque problemati fatisfaciat aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(nss+aa)}}$, in eaque loco aa, quantitatem tam affirmatiuam quam negatiuam accipere liceat, ponamus ab loco aa, ne forma quadrati folum fignum affirmatiuum inuoluere videatur: hincque erit A fin. $p = \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ et $p = \text{fin. A} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ atque $\sqrt{(1-pp)} = \text{cof. A.} \int \frac{ds}{(\sqrt{nss+ab})}$. Quae aequationes fi multiplicentur per ds, obtinebitur $dx = ds\,\text{fin. A.} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ et $dy = ds\,\text{cof. A.} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$, quae per lemma §. 10. datum ita integrabuntur, vt fit $x = \frac{ns}{1+n}\,\text{fin. A.} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} \frac{-\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}\,\text{cof. A.} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$ atque $y = \frac{ns}{1+n}\,\text{cof A.} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} + \frac{\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}\,\text{fin. A.} \int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}}$.

§. 31. Quoniam autem ex aequationibus differentialibus eft fin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} = \frac{dx}{ds}$ atque cof. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(nss+ab)}} = \frac{dy}{ds}$, prodibit his valoribus in aequationibus integratis fubftiſubſtituendis $xds = \frac{nsdx - dy\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$ et $yds = \frac{nsdy + dx\sqrt{(nss+ab)}}{1+n}$: ex quibus ſi arcus s eliminetur, ſequens inter ſolas coordinatas x et y naſcitur aequatio $\frac{nabds^2}{(1+n)^2} = n(ydx - xdy)^2 - (xdx + ydy)^2$, quae quomodo ad ſeparationem atque conſtructionem ſit perducenda ex §. 25. intelligi poteſt. Conſtructio ſcilicet commodius deducetur ex aequatione inter diſtantias ſingulorum curuae punctorum a dato puncto fixo ceu centro et perpendicula in tangentes: eiusmodi autem aequatio deriuabitur facillime ſumendis quadratis coordinatarum x et y, tum enim prodibit iſta aequatio $xx + yy = \frac{ab}{(1+n)^2} + \frac{nss}{1+n}$. ſeu $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} - \frac{ab}{n(1+n)}\right)}$. Pro huius vero curuae euoluta prima aequatio ſimili modo accepta erit $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} + \frac{ab}{1+n}\right)}$ pro euoluta ſecunda haec $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} - \frac{nab}{1+n}\right)}$ pro euoluta tertia $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} + \frac{n^2ab}{1+n}\right)}$ etc. ex quo ſi habeatur pro prima curua aequatio vel conſtructio, eadem totius ſeriei euolutarum naturam in ſe complectetur: quarum ſingulae problemati aeque ac ipſa prima ſatisfaciet.

§. 32. Referatur itaque curua ad centrum fixum A, in quo ante axis AP terminabatur, ponaturque recta AM $= \sqrt{(xx+yy)} = z$, perpendiculum in tangentem, AT $= p$ ipſaque tangens MT $= \sqrt{(zz-pp)} = t$, erit elementum curuae $ds = \frac{zdz}{t}$. At ex praecedente aequatione pro curua noſtra inuenta emergit haec $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)zz}{n} - \frac{ab}{n(1+n)}\right)}$, vnde fit $ds = \frac{(1+n)zdz}{\sqrt{\left(n(1+n)zz - \frac{nab}{1+n}\right)}} = \frac{zdz}{t}$: quae cum per zdz diuidi queat, erit $t = \sqrt{\left(\frac{nzz}{1+n} - \frac{nab}{(1+n)^3}\right)} = \frac{s}{1+n}$ Fig. 5.

$\frac{s}{1+n}$; et $p = \sqrt{(\frac{zz}{1+n} + \frac{nab}{(1+n)^3})}$. Radius osculi vero r, qui eſt $= \sqrt{(nss + ab)}$, erit $= \sqrt{((1+n)zz + \frac{nab}{1+n})}$ ex quo erit $r = (1+n)p$ et $s = (1+n)t$, quae ſunt proprietates notatu dignae pro curua quaeſita.

§. 33. Ad figuram curuae inueſtigandam habeat primum conſtans ab valorem affirmatiuum ſitque $\frac{ab}{(1+n)^2} = cc$, erit $t = \sqrt{\frac{n}{1+n}(zz-cc)}$ et $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz+ncc)}$: vnde perſpicitur z neceſſario maiorem eſſe debere quam c. Caſu autem quo $z=c$ fit $t=0$, et $p=c$; quare hoc
Tab. I. fig. 8. loco ipſa recta AM in curuam erit normalis. Deſcribatur igitur centro C radio CA $= c$ circulus AS, ſitque curuae quaeſitae initium in A, vbi curua ad radium CA erit normalis, ibique radium osculi habebit $= (1+n)$ CA. Iam ſumatur curuae punctum quodcunque M, poſitaque vt ante CM $= z$, CT $= p$ et MT $= t$, erit $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz+ncc)}$ et $t = \sqrt{\frac{n}{1+n}(zz-cc)}$, et anguli CMT tangens $= \frac{p}{t} = \sqrt{\frac{zz+ncc}{nzz-ncc}}$; quare creſcente diſtantia z, hic angulus continuo decreſcet, donec tandem, quando fit $z = \infty$, huius anguli tangens fiat $= \sqrt{\frac{1}{n}}$, vbi curua cum logarithmica ſpirali confundetur.

§. 34. Vt vero curuae huius commodam constructionem tradamus, ponatur arcus circularis AS $= q$, cuius elementum Ss erit $= dq$, vnde fiet Mn $= \frac{zdq}{c}$, atque $t:p = dz:\frac{zdq}{c}$, ex quo oritur $dq = \frac{cpdz}{zt} = \frac{cdz}{z}\sqrt{\frac{zz+ncc}{nzz-ncc}}$ Ponatur $\sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}} = u$ erit $zz = \frac{nncc(1+uu)}{n-uu}$ et $\frac{dz}{z} = \frac{udu}{1+uu} + \frac{udu}{n-uu}$, hincque $\frac{dq}{c} = \frac{du}{1+uu} + \frac{du}{n-uu}$, cuius integrale eſt $\frac{q}{c} = \text{A tang. } u + \frac{1}{2\sqrt{n}} l \frac{\sqrt{n}+u}{\sqrt{n}-u} = \text{A tang.} \sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} l \frac{\sqrt{(zz+ncc)}+\sqrt{(zz-cc)}}{\sqrt{(zz+ncc)}-\sqrt{(zz-cc)}}$ Sumta igitur prolubitu

diſtantia

diſtantia z eius poſitio reſpectu C A ita definietur. Dabitur primo triangulum M C T, cuius anguli M C T tangens erit $= \sqrt{\frac{nzz-ncc}{zz+ncc}}$. Deinde hoc triangulum circa C ita erit diſponendum, vt angulus A C T fiat $= \frac{1}{2\sqrt{n}} \, l \frac{\sqrt{(zz+ncc)}+\sqrt{(zz-cc)}}{\sqrt{(zz+ncc)}-\sqrt{(zz-cc)}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \, l \frac{p\sqrt{n}+t}{p\sqrt{n}-t}$. Quodſi ergo fiat $z = \infty$, arcus A S infinite magnus euadet, ac propterea curva A M O infinitis ſpiris circa C peragendis in infinitum excurret: ac recta A C erit huius curuae diameter.

§. 35. Sit nunc ab quantitas negatiua, et ponatur $\frac{-nab}{(1+n)^2} = cc$, erit $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz-cc)}$ et $t = \sqrt{\frac{1}{1+n}(nzz+cc)}$ vnde perſpicuum eſt z non poſſe eſſe $< c$: caſu autem quo $z = c$, fit $p = 0$ et $t = c$; ex quo tangens curuae hoc loco per ipſum centrum tranſibit. Deſcribatur igitur centro C radio $CA = c$ circulus, ſitque A M O curua quaeſita, quae in A circulo normaliter inſiſtat, ita vt recta A C ſit tangens huius curuae in A. Sumto ergo puncto quocunque M, et ex C in tangentem M T demiſſo perpendiculo C T, erit $CM = z$. $CT = p$ et $MT = t$, atque anguli C M T tangens erit $= \frac{p}{t} = \sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}}$ Quare diſtantia z in infinitum creſcente fiet anguli C M T tangens $= \sqrt{\frac{1}{n}}$; ibique curua cum logarithmica ſpirali confundetur. Tab. II. Fig. 1.

§. 36. Conſtructio huius curuae ſimili modo perficietur, quo caſu praecedente; poſito enim arcu circulari $AS = q$, erit $t : p = dz : \frac{zdq}{c}$, vnde fit $dq = \frac{cpdz}{tz} = \frac{cdz}{z}\sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}}$. Facta nunc ſimili ſubſtitutione prodibit ſequens aequatio integralis $\frac{q}{c} = \text{A tang.} \sqrt{\frac{nzz+cc}{zz-cc}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \, l \frac{\sqrt{n(zz-cc)}+\sqrt{(nzz+cc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{n(zz-cc)}} - \text{A tang.} \infty$; quae reducitur ad hanc

$\frac{q}{c} +$

$\frac{q}{c} + \text{A tang.} \sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} l \frac{\sqrt{(nzz+cc)}+\sqrt{(nzz-ncc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{(nzz-ncc)}}$. Quod si ergo longitudo M C pro lubitu accipiatur, super ea formetur triangulum rectangulum C P M, ita vt sit $CP = t = \sqrt{\frac{1}{1+n}(nzz+cc)}$ et $PM = p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz-cc)}$ quo facto hoc triangulum in talem situm collocetur vt angulus A C P fiat $= \frac{1}{2\sqrt{n}} l \frac{\sqrt{(nzz+cc)}+\sqrt{(nzz-ncc)}}{\sqrt{(nzz+cc)}-\sqrt{(nzz-ncc)}}$.

Tab. II. fig. 2. §. 37. Cum igitur his duobus casibus solutionis problematis pars prior absoluatur, accedamus ad alteram partem, in qua euolutae primae B N radii osculi a B ad N pergendo decrescunt. Quare si in curua quaesita ponatur arcus $AM = s$, radius osculi $MN = r$, erit euolutae primae BN arcus $BN = r - a$, radius osculi $Nm = \frac{rdr}{ds}$ hincque pro euoluta secunda arcus $am = b - \frac{rdr}{ds} = ns$; et radius osculi $mn = -\frac{r}{ds} d . \frac{rdr}{ds} = ns$. Ex vtraque aequatione mutato initio A resultat ista $nsds + rdr = 0$, quae integrata dat $nss + rr = aa$ seu $r = \sqrt{(aa - ns)}$, quae cum omnino similis sit illi quae supra §. 17. est inuenta, huic casui satisfacient epicycloides et hypocycloides omnes. Curuarum itaque, quae suis euolutis secundis directe sunt similes quinque nacti sumus genera; quorum primum omnes spirales logarithmicas complectitur, tum sequentur bina spiralium genera noua §. §. 33, 35. exposita; reliqua bina genera constituunt epicycloides et hypocycloides.

§. 38. Circa similitudinem euolutarum secundarum restat hoc problema.

Tab. II. fig. 3. *Inuenire curuas, quae suis euolutis secundis inuerse sint similes.*

Huius

Huius problematis pariter ac praecedentis duplex requiritur ſolutio, prout euolutae primae radii oſculi ab H pergendo vel creſcunt vel decreſcunt, ſi quidem in curua quaeſita AEB curuedo ab A ad B decreſcat. Ponamus igitur euolutae primae radios osculi ab H ad N creſcere, ſitque E id punctum in curua quaeſita ita comparatum vt portionis EB euoluta ſecunda ac ſimilis ſit portioni AE, huiusque euoluta ſecunda be ſimilis illi portioni BE, prouti ſimilitudo inuerſa poſtulat. Circa E ſumantur vtrinque arcus EM et EQ aeque ampli, atque euolutis prima HN et ſecunda ba deſcriptis, debebit arcus em ſimilis eſſe arcui EM, et arcus eq ipſi EQ.

§. 39. Vocetur radius osculi $EF = a$, et $Fe = b$, atque ponantur arcus $EM = s$; $EQ = S$; itemque radii osculi $MN = r$ et $QR = R$, habebitur ob arcus aeque amplos $\frac{ds}{r} = \frac{dS}{R}$. Iam itaque in euoluta ſecunda erit propter ſimilitudinem $em = ns$, $eq = nS$, radius osculi in $m = n r$, et radius osculi in $q = nR$. At ex natura euolutionis habebitur $FN = r - a$; $FR = a - R : Nq = \frac{rdr}{ds}$; et $Rm = \frac{-RdR}{ds} = \frac{-rdR}{ds}$ Denique in euoluta ſecunda erit $eq = \frac{rdr}{ds} - b$; et $em = b + \frac{rdR}{ds}$: atque radius oſculi in $q = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$, ac radius osculi in $m = \frac{r}{ds} d. \frac{rdR}{ds}$. His cum expreſſionibus ex ſimilitudine natis coniungendis orientur hae aequationes $ns = b + \frac{rdR}{ds}$; $nS = \frac{rdr}{ds} - b$; $nr = \frac{r}{ds} d. \frac{rdR}{ds}$; $nR = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$ quae binae poſteriores aequationes in prioribus continentur ob aequationem fundamentalem $\frac{dS}{R} = \frac{ds}{r}$.

§. 40. Habemus itaque tres iſtas aequationes

I. $rdS = Rds$

II. $nsds = rdR + bds$

III. $nSds = rdr - bds$

ex quibus curuae constructio debet formari: quae ita absoluetur, vt binae variabiles S et R eliminentur, atque aequatio eruatur inter s et r; haec enim si ita fuerit comparata, vt ad datum arcum s quantitas radii osculi r possit assignari, simul ipsa curua poterit construi, quemadmodum alibi ostendi. Est vero ex tertia aequatione $S = \frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$, atque ex prima $R = \frac{rdS}{ds} = \frac{r}{nds}\, d.\, \frac{rdr}{ds}$, qui in secunda substitutus dat hanc $\frac{(ns-b)ds}{r} = \frac{1}{n}\, d.\, \frac{r}{ds}\, d.\, \frac{rdr}{ds}$: haec vero aequatio euoluta ad differentialia tertii gradus exsurgit, quae vix vllo modo deprimi atque ad constructionem accommodari queat. Ipsa quidem aequatio haec mutato initio E seu scripto ns loco $ns-b$ ita se habebit: $n^2 s ds^3 = r^3 d^3 r + 4 r^2 dr ddr + r dr^3$; posito ds constante, haec vero commode integrabilis existit, est namque integralis $n^2 s^2 ds^2 + C ds^2 = 2 r^3 ddr + r^2 dr^2$.

§. 41. Quantumuis autem difficilis huius aequationis differentio-differentialis constructio videatur, tamen ea ex aequationibus primitiuis deduci potest. Secunda scilicet aequatio per primam abit in hanc

$$n s dS = R dR + b dS$$

ad quam si tertia addatur, obtinebitur ista:

$$n s dS + n S ds = R dR + r dr + b dS - b ds,$$

cuius integralis est $2nSs = R^2 + r^2 + 2bS - 2bs - 2aa$ eiusmodi adhibita constante, vt euanescentibus arcubus s et S radii osculi R et r fiant $= a$. Simili modo si ad tertiam aequationem per primam in hanc transformatam:

$n S dS = R dr - b dS$ addatur secunda, prodit

$n s ds + n S dS = r dR + R dr + b ds - b dS$, cuius integralis est $ns^2 + nS^2 = 2Rr + 2bs - 2bS - 2aa$. Hinc itaque emergunt binae sequentes aequationes:

$R^2 +$

$R^2 + r^2 = 2aa + 2bs - 2bS + 2nSs$; et
$2Rr = 2aa - 2bs + 2bS + nS^2 + ns^2$
ex quibus additis et ſubtractis obtinetur
$(r+R)^2 = 4aa + n(s+S)^2$ atque
$(r-R)^2 = 4b(s-S) - n(s-S)^2$

§ 42. Ex his duabus aequationibus ſi eliminetur R, obtinebitur aequatio algebraica inter S, s et r in qua ſi porro loco S ſubſtituatur eius valor $\frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$, habebitur aequatio differentialis primi gradus inter r et s quae propterea erit integralis illius aequationis differentialis ſecundi gradus ſupra inuentae

$$n^2 s^2 ds^2 + C ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$$

Haec eadem vero aequatio differentialis ſecundi gradus reſultat ſi in aequatione $2Rr = 2aa - 2bs + 2bS + nS^2 + ns^2$ loco R et S ſubſtituantur valores per r et s ſcilicet $R = \frac{r}{nds} d \,.\, \frac{rdr}{ds} = \frac{r^2 ddr + rdr^2}{nds^2}$ et $S = \frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$ fiet enim $\frac{2r^3 ddr + 2rrdr^2}{nds^2} = 2aa - 2bs + \frac{2brdr}{nds} - \frac{2bb}{n} + \frac{r^2 dr^2}{nds} - \frac{2brdr}{nds} + \frac{bb}{n} + nss$ ſeu $2r^3 ddr + r^2 dr^2 = (n^2 s^2 - 2nbs - bb + 2naa) ds^2$. Quare ſi vt ſupra fecimus loco $ns - b$ ſcribamus ſimpliciter ns, prodibit aequatio $n^2 s^2 ds^2 + 2(naa - bb) ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$.

§. 43. Vt nunc huius aequationis differentialis ſecundi gradus veram aſſignemus aequationem integralem, quae erit differentialis primi gradus, ponamus etiam $s = S + \frac{b}{n}$ et $S = S - \frac{b}{n}$, erit $(r + R)^2 = 4aa + n(S + s)^2$ atque $(r - R)^2 = \frac{4bb}{n} - n(s - S)^2$ exiſtente $S = \frac{rdr}{nds}$ ſeu $R^2 + r^2 = 2aa + \frac{2bb}{n} + 2nSs$ atque $2Rr = 2aa - \frac{2bb}{n} + nS^2 + ns^2$ ex qua erit $4R^2 r^2 = n^2 (S^2 + s^2)^2 + 4n$

 $(a^2 -$

$(a^2 - \frac{b^2}{n})(S^2 + s^2) + 4(a^2 - \frac{b^2}{n})^2$: at ex priore aequatione est $4R^2 r^2 = 8(aa + \frac{bb}{n}) rr + 8Ssr^2 - 4r^4$, scribatur f loco $aa - \frac{bb}{n}$ et g loco $aa + \frac{bb}{n}$, ac proueniet sequens aequatio:
$r^4 dr^4 + 2n^2 s^2 r^2 ds^2 dr^2 + n^4 s^4 ds^4 + 4nfr^2 ds^2 dr^2 + 4n^3 fs^2 ds^4 + 4n^2 f^2 ds^4 = 8n^2 gr^2 ds^4 - 4n^2 r^4 ds^4 + 8n^2 sr^3 ds^3 dr$, quae adeo est integralis huius $n^2 s^2 ds^2 + 2nfds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$, id quod eo magis est notandum, quod nulla pateat via alteram ex altera deducendi, immediate scilicet. Nam si differentialis aequatio secundi gradus resoluatur in plures aequationes per valores assumtitios $S = \frac{rdr}{nds}$ et $R = \frac{r^2 ddr + rdr^2}{nds^2}$, tum congruentia satis perspicitur eo modo quo sumus vsi. Atque hinc fortasse aliquando nouam methodum detegere licebit, ad aequationes differentiales altiorum graduum integrandas. Hic quidem sufficiat speciem quandam huius methodi indicasse, ex qua ipsius vsus ingens, si quando excoletur, perspiciatur.

§. 44. Interim tamen istae aequationes ad curuam quaesitam construendam non multum iuuant, quam ob causam aliam viam ad constructionem perueniendi aperiemus. Ponamus $s + S = p$; $s - S = q$; $r + R = u$; et $r - R = v$: erit $s = \frac{p+q}{2}$; $S = \frac{p-q}{2}$; $r = \frac{u+v}{2}$ et $R = \frac{u-v}{2}$; qui valores in aequatione $rdS = Rds$ substituti dabunt $udq = vdp$; aequationes vero §. 41. inuentae abibunt in sequentes $u^2 = 4aa + np^2$ et $v^2 = 4bq - nq^2$, ex quibus obtinebitur $\frac{dp}{\sqrt{(4aa + npp)}} = \frac{dq}{\sqrt{(4bq - nqq)}}$, in qua cum variabiles p et q sint a se inuicem separatae, dabitur q per p et proinde S per s; hincque porro v et u atque adeo r et R per s.

Quare

Quare cum ad datum ipſius s valorem quemuis aſſignari queat valor ipſius r, ipſa curua, in qua s arcum et r radium oſculi denotat, conſtrui poterit, ex quo problema propoſitum, quantum quidem deſiderari poteſt, eſt reſolutum, cum id ſit perductum ad aequationem differentialem primi gradus, in qua variabiles p et q ſunt a ſe invicem ſeparatae.

§. 45. Quodſi autem detur relatio inter arcum curuae cuiuspiam s ac radium oſculi r, ipſa curua ſequenti modo conſtruetur. Ponatur abſciſſa $= x$, applicata $= y$, ſitque $dx = pds$, erit $dy = ds\, V(1-pp)$ atque $r = \frac{ds\, V(1-pp)}{dp}$; vnde fiet $\frac{dp}{V(1-pp)} = \frac{ds}{r}$ et A. ſin. $p = \int \frac{ds}{r}$ quod integrale dabitur ob datam relationem inter s et r. Hanc ob rem habebitur $p =$ ſin. A. $\int \frac{ds}{r}$ atque $V(1-pp) =$ coſ. A. $\int \frac{ds}{r}$; hincque $dx = ds$ ſin. A. $\int \frac{ds}{r}$ et $dy = ds$ coſ. A. $\int \frac{ds}{r}$. Ex quibus tandem per integrationem prodit $x = \int ds$ ſin. A. $\int \frac{ds}{r}$ atque $y = \int ds$ coſ. A. $\int \frac{ds}{r}$; ita vt per quadraturas ad datum cuiusque arcus valorem aſſignari queant tam abſciſſa quam applicata.

§ 46. Accedamus iam ad caſum alterum problematis §. 38. propoſiti, ac decreſcant radii oſculi euolutae primae HN ab H ad N pergendo. Maneant vti in praecedente caſu radii oſculi fixi $EF = a$, $Fe = b$, vocenturque arcus $EM = s$, $EQ = S$ et radii oſculi $MN = r$, et $QR = R$; vnde ob ſimilitudinem in euoluta ſecunda erit $em = ns$ et $eq = nS$. Per naturam vero euolutionis erit in euoluta prima $FN = r - a$; $FR = a - R$ $Nq = \frac{rdr}{ds}$ et $Rm = \frac{-RdR}{ds}$: ex quibus pro euoluta ſecunda oritur $em = ns = \frac{-RdR}{ds} - b$, atque $eq = nS = b - \frac{rdr}{ds}$. Tab. II. fig. 4.

$\frac{ndr}{ds}$. Ob arcus denique EM et EQ aeque amplos erit $\frac{ds}{r} = \frac{ds}{R}$. Quamobrem habebuntur tres sequentes aequationes:

$$\text{I. } r\,dS = R\,ds$$
$$\text{II. } ns\,dS = -R\,dR - b\,dS.$$
$$\text{III. } nS\,ds = -r\,dr + b\,ds.$$

quarum binae posteriores ope primae transmutantur in has:

$$\text{II. } ns\,ds = -r\,dR - b\,ds$$
$$\text{III. } nS\,dS = -R\,dr + b\,dS.$$

§. 47. Addamus primum binas aequationes posteriores in forma priore, eritque summa:

$$ns\,dS + nS\,ds = -R\,dR - r\,dr + b\,ds - b\,dS$$

quae integrata dat hanc aequationem

$$2nSs = 2aa - R^2 - r^2 + 2bs - 2bS$$

seu $R^2 + r^2 = 2a^2 + 2b(s-S) - 2nSs$

Deinde addamus easdem aequationes in forma posteriori, erit $ns\,ds + nS\,dS = -r\,dR - R\,dr - b\,ds + b\,dS$ cuius integrale est $ns^2 + nS^2 = 2a^2 - 2Rr - 2b(s-S)$ seu $2Rr = 2a^2 - 2b(s-S) - n(s^2+S^2)$, quae cum illa coniuncta tum addendo tum subtrahendo praebet

$$(r+R)^2 = 4a^2 - n(s+S)^2 \text{ atque}$$
$$(r-R)^2 = 4b(s-S) + n(s-S)^2$$

quae aequationes ab illis, quas casu praecedente inuenimus non differunt, nisi quod n habeat valorem negatiuum.

§. 48. Quodsi ergo ad curuam construendam faciamus vt ante $s+S=p$, $s-S=q$; $r+R=u$; et $r-R=v$ erit $u = \sqrt{(4aa-npp)}$ et $v = \sqrt{(4bq+nqq)}$ hincque per aequationem primam $r\,dS = R\,ds$ obtinebitur

$$\frac{dp}{\sqrt{(4aa-npp)}} = \frac{dq}{\sqrt{(4bq+nqq)}}$$

per

per quam dabitur relatio inter p et q, vnde s et r per eandem variabilem vel p vel q determinabitur; id quod ad curuam construendam sufficit.

§. 49. Vt autem naturam huius curuae propius inspicere liceat, tentabimus ipsam constructionem perficere, atque aequationem inter coordinatas orthogonales x et y elicere. Quod quo commodius fieri queat, introducamus nouam variabilem z sitque

$dz = \frac{dp\sqrt{n}}{\sqrt{(4aa-npp)}} = \frac{d\sqrt{n}}{\sqrt{(4bq+nqq)}}$, atque tam p quam q per eandem variabilem z definiatur, primo autem prodibit A. fin. $\frac{p\sqrt{n}}{2a} = z$ hincque $p = \frac{2a}{\sqrt{n}}$ fin. A. z; tum vero habebitur $z = l\frac{nq+2b+\sqrt{(4nbq+nnqq)}}{c}$ hincque $q = \frac{(ce^z-2b)^2}{2nce^z}$

Per z igitur definitis p et q, porro reperientur u et v, ex quibus tandem consequitur.

$$s = \frac{a}{\sqrt{n}} \text{ fin. A. } z + \frac{(ce^z-2b)^2}{4nce^z} \quad \text{et}$$

$$r = a \text{ cof. A } z + \frac{(c^2e^{2z}-4bb)}{4ce^z\sqrt{n}}.$$

§. 50. Hinc differentiando emergit $ds = \frac{adz \text{ cof. A.} z}{\sqrt{n}}$ $+ \frac{dz(c^2e^{2z}-4bb)}{4nce^z}$, ita vt fit $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{\sqrt{n}}$ et $\int\frac{ds}{r} = \frac{z}{\sqrt{n}}$. Quare si ponatur abscissa $= x$ et applicata $= y$ erit per §. 45.

$$x = \frac{a}{\sqrt{n}}\int dz \text{ cof. A.} z. \text{ fin.A} \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{c}{4n}\int e^z dz \text{ fin. A} \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{bb}{nc}\int e^{-z}dz \text{ fin. A. } \frac{z}{\sqrt{n}}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{n}}\int dz \text{ cof. A} z. \text{ cof. A} \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{c}{4n}\int e^z dz \text{ cof. A} \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{bb}{nc}\int e^{-z}dz \text{ cof. A} \frac{z}{\sqrt{n}}$$

quae

quae quidem formulae iam sufficere possent ad curuam per quadraturas construendam; at constructio facilior inde euadet, quod singulae hae formulae differentiales actu integrationem admittant.

§. 51. Singulas autem has formulas differentiales sequenti modo integramus: $\int dz \operatorname{cos.} A z . \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \operatorname{sin.} A z \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int dz \operatorname{sin.} A z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \operatorname{sin.} A z \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{cos.} A z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \int dz \operatorname{cos.} A z \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$; vnde oritur

$$\int dz \operatorname{cos.} A z \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n \operatorname{sin.} A z . \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} . \operatorname{cos.} A z . \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n - 1}$$

at casu quo $n = 1$, quia est $\operatorname{cos.} A z . \operatorname{sin.} A z = \frac{1}{2} \operatorname{sin.} A\, 2z$ erit $\int dz \operatorname{cos.} A z . \operatorname{sin.} A z = -\frac{1}{4} \operatorname{cos.} A\, 2z$. Deinde pari modo est $\int dz \operatorname{cos.} A z . \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \operatorname{sin.} A z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \int dz . \operatorname{sin.} A z . \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} \operatorname{sin.} A z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{cos.} A \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \int dz \operatorname{cos.} A z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$. ergo $\int dz \operatorname{cos.} A z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n \operatorname{sin.} A z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} . \operatorname{cos.} A z . \operatorname{sin.} A . \frac{z}{\sqrt{n}}}{n - 1}$. Casu autem quo $n = 1$ ob $\operatorname{cos.} A z \operatorname{cos.} A z = \frac{1 + \operatorname{cos.} A\, 2z}{2}$ erit $\int dz \operatorname{cos.} A z \operatorname{cos.} A z = \frac{z}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sin.} A\, 2z$.

§. 52. Reliquas formulas simili modo integramus; est scilicet $\int e^z dz \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = e^z \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^z dz \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = e^z \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{e^z}{\sqrt{n}} \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \int e^z dz \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$, hincque $\int e^z dz \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n e^z \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - e^z \sqrt{n} . \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n + 1}$.

At $\int e^z dz \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = e^z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^z dz \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n e^z \operatorname{cos.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + e^z . \sqrt{n} . \operatorname{sin.} A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n + 1}$. Deinde simili modo

$\int e^{-z} dz$

$\int e^{-z} dz \,\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} = -e^{-z} \,\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{}} \int e^{-z} dz \,\text{cof. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}}$
$= -e^{-z} \,\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} \frac{e^{-z}}{\sqrt{n}} \,\text{cof. A.}\, \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^{-z} dz \,\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}}$
hincque $\int e^{-z} dz \,\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{-ne^{-z} \,\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} - e^{-z} \sqrt{n}. \,\text{cof.A}\, \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}$

Denique $\int e^{-z} dz \,\text{cof. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} = -e^{-z} \,\text{cof. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^{-z} dz$ $\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{-ne^{-z} \,\text{cof. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} + e^{-z} \sqrt{n}. \,\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}.$

His igitur integralibus inuentis habebimus $x =$

$$x = \frac{a\sqrt{n} \,\text{fin. A}\, z \,.\, \text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} + a \,\text{cof. A}\, z \,.\, \text{cof. A.}\, \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1} +$$

$$\frac{c\sqrt{n}e^{z} \,\text{fin. A}\frac{z}{\sqrt{n}} - ce^{z} \,\text{cof. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}}}{4(n+1)\sqrt{n}} + \frac{bb\sqrt{n}e^{-z} \,\text{fin. A}\frac{z}{\sqrt{n}} + bbe^{-z} \,\text{cof.A}\frac{z}{\sqrt{n}}}{c(n+1)\sqrt{n}}$$

atque $y = \frac{a\sqrt{n} \,\text{fin. A}\, z \,\text{cof. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}} - a \,\text{cof. A}\, z \,\text{fin. A}\, \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1} +$

$$\frac{c\sqrt{n}\,.\,e^{z} \,\text{cof.A}\frac{z}{\sqrt{n}} + ce^{z} \,\text{fin.A}\frac{z}{\sqrt{n}}}{4(n+1)\sqrt{n}} + \frac{bb\sqrt{n}\,.\,e^{-z} \,\text{cof. A}\frac{z}{\sqrt{n}} - bbe^{-z} \,\text{fin.A}\, \frac{z}{\sqrt{n}}}{c(n+1)\sqrt{n}}$$

fumendis quadratis obtinebitur $x\,x + y\,y =$

$$\frac{a^2(n \,\text{fin.A}\, z \,.\, \text{fin.A}z) + \text{cof.A}z.\text{cof A}z)}{(n-1)^2} + \frac{ac\,e^{z}(n \,\text{fin.A}z - \text{cof.A}z)}{2(n^2-1)\sqrt{n}}$$
$$+ \frac{2abbe^{-z}(n \,\text{fin. A}z + \text{cof.A}z)}{c(nn-1)\sqrt{n}} + \frac{cc\,e^{2z}}{16n(n+1)} + \frac{bb(n-1)}{2n(n+1)^2} +$$
$$\frac{b^4\, e^{-2z}}{c^2 n(n+1)}.$$

Simili autem modo curuae cafui praecedenti huius problematis fatisfacientis conftructio poteft adornari. Ceterum curuae iftae, quae fuis euolutis fecundis inuerfe funt fimiles, fimul ita funt comparatae vt directe fint fimiles fuis euolutis quartis.

§. 52. Quod autem ad curuas attinet, quae cuicunque euolutae directe sint similes, lex aequationum inter arcum s et radium osculi r contentarum facile patet. Pro curuis enim quae suis euolutis primis directe sunt similes haec habetur aequatio $\pm n s = r$. Pro curuis quae suis euolutis secundis sint similes haec $\pm n s = \frac{rdr}{ds}$. Pro curuis quae suis euolutis tertiis sint similes haec $\pm n s = \frac{r}{ds} d . \frac{rdr}{ds} = \frac{r^2 ddr + rdr^2}{ds^2}$; pro curuis quae suis euolutis quartis sint similes haec $\pm n s = \frac{r}{ds} d . \frac{r}{ds} d . \frac{rdr}{ds} = \frac{r^3 d^3 r + 4 r^2 dr ddr + rdr^3}{ds^3}$. Pro curuis vero, quae suis euolutis quintis sint similes, habebitur haec aequatio $\pm n s = \frac{r}{ds} d . \frac{r}{ds} d . \frac{r}{ds} d . \frac{rdr}{ds}$. quas aequationes quousque lubuerit continuare licet.

§. 53. Consideremus igitur curuas, quae suis euolutis tertiis sint similes, quae hac aequatione continentur $\pm n s d s^2 = r^2 d d r + r d r^2$ posito $d s$ constante. Ad hanc aequationem in differentialem primi gradus transmutandam ponamus $s = e^{\frac{\int u d u}{y}}$ et $r = e^{\frac{\int u d u}{y}} u$ erit ob $d s$ constans $d d u = \frac{dudu}{y} - \frac{du^2}{u} - \frac{udu^2}{y}$ atque $d s = e^{\frac{\int udu}{y}} \frac{udu}{y}$; $d r = e^{\frac{\int udu}{y}} (du + \frac{uudu}{y})$; $ddr = e^{\frac{\int udu}{y}} (\frac{dudy}{y} + \frac{udw^2}{y} - \frac{dw^2}{w})$, quibus valoribus substitutis aequatio nostra differentialis secundi gradus abit in hanc $\pm n d u = y d y + 3 u y d n + u^3 d u$, cuius aequationis integrale particulare reperitur esse $y = - u^2 - u \sqrt[3]{\pm n - \sqrt[3]{n^2}}$ Ad integrale igitur generale inueniendum ponamus $y = z - u^2 - u \sqrt[3]{\pm n - \sqrt[3]{n^2}}$

erit

erit $dy = dz - 2udu - du\sqrt[3]{\pm n}$ atque $o = zdz + zudu - zdu\sqrt[3]{\pm n} - uudz - udz\sqrt[3]{\pm n} - dz\sqrt[3]{n^2}$ Ponamus $\pm n = m^3$ quia m perinde assignari potest siue sit n numerus affirmatiuus siue negatiuus; eritque $o = zdz + zudu - mzdu - uudz - mudz - m^2 dz$.

§. 54. Haec vero aequatio ex earum est numero, quae separabiles redduntur, si ponatur $dz = pdu$, hoc enim facto erit $o = pz + zu - mz - pu^2 - mpu - m^2 p$ vnde fit $z = \frac{p(u^2+mu+m^2)}{p+u-m}$, quae substitutio adhibeatur. Differentietur scilicet, eritque $dz = pdu = \frac{u^3dp + pu^2du - 2m^2pdu - 2m^2pdu - 2mpudu + 2up^2du + mp^2du - m^3dp}{(p+u-m)^2}$ quae reducta abit in hanc: $\frac{du}{u^3-m^3} = \frac{dp}{p^3-3mp^2+3m^2p}$ seu $\frac{du}{(u-m)(u^2+mu+mm)} = \frac{dp}{p(p^2-3mp+3m^2)}$ quae integrata dat $\frac{1}{3m^2} l \frac{u-m}{\sqrt{(u^2+mu+m^2)}} - \frac{1}{m^2\sqrt{3}}$ A tang. $\frac{u\sqrt{3}}{u+2m} = \frac{1}{3m^2} l \frac{p}{\sqrt{(pp-3mp+3m^2)}} + \frac{1}{m^2\sqrt{3}}$ A tang. $\frac{p}{3m\sqrt{3}-p\sqrt{3}} + C$ seu $\frac{1}{\sqrt{3}} l \frac{(u-m)\sqrt{(p^2-mp+3m^2)}}{p\sqrt{(uu+mu+m^2)}} =$ A tang. $\frac{u\sqrt{3}}{u+2m}$ + A tang. $\frac{p}{2m\sqrt{3}-p\sqrt{3}}$ + Const. = A tang. $\frac{3mu+mp-pu}{2m^2\sqrt{3}-mp\sqrt{3}+mu\sqrt{3}-pu\sqrt{3}}$ + Const. Quia vero est $p = \frac{(m-u)(y+uu+mu+mm)}{y}$ erit $\frac{1}{\sqrt{3}} l \frac{\sqrt{(y^2+y(2uu-mu-m^2)+(m-u)^2(uu+mu+mm))}}{y+uu+mu+mm} =$ A tang. $\frac{(y+(m-u)^2)(u^2+mu+m^2}{(y(uu+mu-mm)+(u^2-m^2)(uu+mu+mm))\sqrt{3}}$ + Const. vbi est $u = \frac{r}{s}$ et $y = \frac{rdr}{sds} - \frac{rr}{ss}$.

§. 55. Quoniam inuenimus quaestioni particulariter satisfieri aequatione $y + uu + mu + mm = o$ prodibit haec aequatio inter r et s partem quaestionis resoluens $rdr + mrds + m^2 sds = o$, quae igitur aequatio erit integralis

 huius

huius $m^3 s ds^2 = r^2 ddr + r dr^2$ id quod illius differentiatio indicat, etiamsi vice versa per integrationem illa ex hac erui vix queat: Ponamus igitur ad integrale latissimo sensu acceptum inueniendum id esse $r dr + mr ds + m^2 s ds = V ds$ erit differentiando $r ddr + dr^2 + m dr ds + m^2 ds^2 = dV ds$, ergo $r^2 ddr + r dr^2 = r dV ds - mr dr ds - m^2 r ds^2 = m^3 s ds^2$. Hinc erit porro $r dV ds = m^3 s ds^2 + m^2 r ds^2 + mr dr ds = mV ds^2$ ex qua fit $\frac{dV}{V} = \frac{mds}{r}$ et $V = ce^{\int \frac{mds}{r}}$ vbi $\int . \frac{ds}{r}$ per coordinatas exprimi potest vt constat, ita vt sit integrale $r dr + mr ds + m^2 s ds = ce^{\int \frac{mds}{r}} ds$.

§. 56. Succinctiores autem prodeunt aequationes pro omnibus huiusmodi curuis, quae cuipiam euolutae debent esse similes, si non inter r et s sed inter s et $\frac{ds}{r}$ quaerantur aequationes. Hunc in finem ponatur $\frac{ds}{r} = dv$ erit $r = \frac{ds}{dv}$ positoque elemento dv constante habebitur pro curuis

quae similes sunt	ista aequatio
euolutis primis	$\pm nsdv = ds$
euolutis secundis	$\pm nsdv^2 = dds$
euolutis tertiis	$\pm nsdv^3 = d^3 s$
euolutis quartis	$\pm nsdv^4 = d^4 s$
euolutis quintis	$\pm nsdv^5 = d^5 s$
euolutis sextis	$\pm nsdv^6 = d^6 s$

etc.

quae aequationes etsi sunt vno gradu differentialium altiores quam praecedentes, tamen tractatu sunt faciliores. Deinde de ſi s determinetur per v, mox habebitur aequatio inter coordinatas orthogonales, x et y, ope aequationum $x = \int ds$ ſin. A v et $y = \int ds$ coſ. A v.

§. 57. Quanquam hae aequationes pluribus modis tractari poſſunt, tamen hic reliquis praeferendus eſſe videtur, quo primo eiusmodi valores ipſius s perpenduntur, quae ſuis differentialibus cuiusuis ordinis ſint ſimiles. Cum enim generaliter ſit $\frac{d^{\nu} s}{dv^{\nu}} = \pm n s$, valorem ipſius s ita comparatum eſſe oportet, vt ipſius differentiale cuiusuis gradus ipſi ſit ſimile, ſeu per id diuiſum conſtantem quantitatem producat, Huiusmodi autem quantitatum tria dantur genera, quorum primum quantitates exponentiales complectitur, ſecundum ſinus et coſinus arcuum circularium, tertium vero vtriusque ſpeciei quantitatibus exponentialibus, ſcilicet et ſinibus coſinibusque arcuum circularium coniunctim continetur.

§. 58. Primum igitur genus ita eſt comparatum vt ſit $s = e^{gv}$, huiusque formulae differentialia cuiusque gradus ſequenti modo progrediuntur

grediuntur	eritque
I. $\frac{ds}{dv} = e^{gv} g$	$\frac{ds}{sdv} = g = \pm n$
II. $\frac{dds}{dv^2} = e^{gv} g^2$	$\frac{dds}{sdv^2} = g^2 = \pm n$
III. $\frac{d^3 s}{dv^3} = e^{gv} g^3$	$\frac{d^3 s}{sdv^3} = g^3 = \pm n$
IV. $\frac{d^4 s}{dv^4} = e^{gv} g^4$	$\frac{d^4 s}{sdv^4} = g^4 = \pm n$
etc.	etc.

Apparet igitur aequationem $s = e^{gv}$ ſatisfacere plerisque quaeſtionum caſibus, quibus curuae euolutis ſuis dati ordinis similes requiruntur. Quodsi enim quaeratur curua, quae suae euolutae ordinis ν sit similis, duplex pro ea habetur aequatio scilicet vel $d^\nu s = nsdv^\nu$, vel $d^\nu s = -nsdv^\nu$; quarum aequationum priori semper satisfacit valor $s = e^{gv}$, sumto $g = \sqrt[\nu]{n}$. Alteri vero casui haec aequatio tantum satisfacit, si ν fuerit numerus impar, sitque $g = \sqrt[\nu]{-n} = -\sqrt[\nu]{n}$; sin autem fuerit ν numerus par, aequationi $d^\nu s = -nsdv^\nu$ iste valor $s = e^{gv}$ ob g imaginarium satisfacere nequit.

§. 59. Perspicuum porro est quibus casibus aequationi $d^\nu s = \pm nsdv^\nu$ satisfaciat valor $s = e^{gv}$, id quod euenit si fiat $g^\nu = \pm n$, iisdem casibus satisfacere valorem $s = ce^{gv}$, quia constans c vtramque aequationis partem afficit. Quando autem ad hanc peruentum fuerit aequationem $s = ce^{gv}$, pro curua quaesita, aequationes $x = \int ds$ sin. A. v et $y = \int ds$ cos. A. v suppeditabunt aequationem inter coordinatas orthogonales curuae quaesitae. Erit autem $x = cg\int e^{gv}dv$ sin. A $v = ce^{gv}$ sin. A $v - c\int e^{gv}dv$ cos. A. $v = ce^{gv}$ sin. A $v - \frac{c}{g}e^{gv}$ cos. A $v - (\frac{c}{g}\int e^{gv}dv$ sin. A. $v) - \frac{x}{gg}$; vnde fit $x = cge^{gv}\frac{(g \text{ sin. A } v - \text{cos. A } v)}{1+gg}$ Cum vero sit $y = cg\int e^{gv}dv$ cos. A v erit $y = cge^{gv}$ sin. A $v - gx$ seu
$$y = \frac{cge^{gv}(\text{sin. A } v + g \text{ cos. A } v)}{1+gg},$$
quae aequatio semper est ad logarithmicam spiralem.

§. 60. Secundum genus valorum ipsius s qui suis differentialibus cuiusque ordinis sunt similes est $s = \alpha$ sin. A. $bv+$

$hv + \beta\,\text{coſ.}\,A\,.\,hv$: cuius differentialia ſequenti modo progredientur.

$$\frac{ds}{dv} = -\beta h\,\text{ſin.}\,A\,.\,hv + \alpha h\,\text{coſ.}\,A\,.\,hv$$

$$\frac{dds}{dv^2} = -\alpha h^2\,\text{ſin.}\,A\,.\,hv - \beta h^2\,\text{coſ.}\,A\,.\,hv$$

$$\frac{d^3s}{dv^3} = +\beta h^3\,\text{ſin.}\,A\,.\,hv - \alpha h^3\,\text{coſ.}\,A\,.\,hv$$

$$\frac{d^4s}{dv^4} = +\alpha h^4\,\text{ſin.}\,A\,.\,hv + \beta h^4\,\text{coſ.}\,A\,.\,hv \quad \text{etc.}$$

Differentialia igitur tantum ordinum parium ita ſunt comparata, vt per s diuiſa quantitatem conſtantem producant. Aequationi ſcilicet $d^{2\nu}s = \pm n s dv^{2\nu}$ ſatisfaciet aequatio $s = \alpha\,\text{ſin.}\,A\,.\,hv + \beta\,\text{coſ.}\,A\,hv$ ſumendo $(-h^2)^\nu = \pm n$.

§. 61. Tertium genus valorum ipſius s ambo priora in ſe complectitur, atque ideo ſolum conſiderari meretur, cum per id omnibus omnino caſibus ſatisfieri queat. Formula autem generalis ita ſe habet $s = e^{gv}(\alpha\,\text{ſin.}\,A\,hv + \beta\,\text{coſ.}\,A\,.\,hv)$ differentialia vero ſequenti modo progrediuntur

$$\frac{ds}{dv} = e^{gv}\left\{\begin{matrix}-\beta h\\+\alpha g\end{matrix}\ \text{ſin.}\,A\,.\,hv \quad \begin{matrix}+\alpha h\\+\beta g\end{matrix}\ \text{coſ.}\,A\,.\,hv\right\}$$

$$\frac{dds}{dv^2} = e^{gv}\left\{\begin{matrix}-\alpha h^2\\-2\beta g h\\+\alpha g^2\end{matrix}\ \text{ſin.}\,A\,.\,hv \quad \begin{matrix}-\beta h^2\\+2\alpha g h\\+\beta g^2\end{matrix}\ \text{coſ.}\,A\,.\,hv\right\}$$

$$\frac{d^3s}{dv^3} = e^{gv}\left\{\begin{matrix}+\beta h^3\\-3\alpha g h^2\\-3\beta g^2 h\\+\alpha g^3\end{matrix}\ \text{ſin.}\,A\,.\,hv \quad \begin{matrix}-\alpha h^3\\-3\beta g h^2\\+3\alpha g^2 h\\+\beta g^3\end{matrix}\ \text{coſ.}\,A\,.\,hv\right\}$$

$$\frac{d^4s}{dv^4} = e^{gv}\left\{\begin{matrix}+\alpha h^4\\+4\beta g h^3\\-6\alpha g^2 h^2\\-4\beta g^3 h\\+\alpha g^4\end{matrix}\ \text{ſin.}\,A\,.\,hv \quad \begin{matrix}+\beta h^4\\-4\alpha g h^3\\-6\beta g^2 h^2\\+4\alpha g^3 h\\+\beta g^4\end{matrix}\ \text{coſ.}\,A\,.\,hv\right\}$$

etc.

Ex

Ex quibus formulis colligitur fore generaliter $\frac{d^\nu s}{dv^\nu} = e^{gv}$
$\Big(\frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu+(g-h\sqrt{-1})^\nu}{2}\alpha \text{ fin. A}.hv +$
$\frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu-(g+h\sqrt{-1})^\nu}{2\sqrt{-1}}\beta \text{ fin.A}.hv + \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu+(g-h\sqrt{-1})^\nu}{2}$
$\beta \text{ cof. A}.hv + \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu-(g-h\sqrt{-1})^\nu}{2\sqrt{-1}}\alpha \text{ cof. A}.hv\Big)$

§. 62. Ponamus esse debere $\frac{d^\nu s}{dv^\nu} = ms$ existente $m = \pm n$, ita vt m quantitatem quamcunque siue affirmatiuam siue negatiuam significet: eritque comparatione instituta
$m\alpha = \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{2} + \frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{2}$
et $m\beta = \frac{(g+h\sqrt{-1})^\nu(\beta-\alpha\sqrt{-1})}{2} + \frac{(g-h\sqrt{-1})^\nu(\beta+\alpha\sqrt{-1})}{2}$;
ex quibus aequationibus eliminata m conficitur haec aequatio
$(g+h\sqrt{-1})^\nu(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{-1} = (g-h\sqrt{-1})^\nu(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{-1}$
cui quidem satisfacit expressio $\alpha^2+\beta^2=0$, at quia hinc ad imaginaria peruenitur, hic valor tanquam inutilis est reiiciendus. Quamobrem habebitur $(g+h\sqrt{-1})^\nu = (g-h\sqrt{-1})^\nu$, quae euoluta abit in hanc $\nu g^{\nu-1}h - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3.}g^{\nu-3}h^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}g^{\nu-5}h^5 -$ etc. $=0$ ex qua aequatione g per h definiri oportet.

§. 63. Ex inspectione harum formularum mox intelligitur eas diuisionem arcuum circularium inuoluere. Quodsi scilicet sumatur arcus quispiam w in circulo, cuius radius $=1$, ponaturque $g = f$ cof. A. w et $h = f$ fin. A. w,

w, debebit w eiusmodi esse arcus, vt sit sin A. $\nu w = o$. Sumtis autem huius modi arcubus pro w, reperietur valor litterae $m = f^\nu$ cos. A. νw. Hanc ob rem pro νw successiue substitui debebunt arcus $0°$, $180°$, $360°$, $540°$, etc. pro singulisque valores cum arcuum w tum litterarum g et h definiri; quo facto obtinebitur valor ipsius m, qui semper erit vel $+ f^\nu$ vel $- f^\nu$. Litterae autem α et β omnino manent indeterminatae, indeque solutiones latius patentes colligentur:

§. 64. Quoniam pro α et β quantitates quaecunque accipi possunt, sumatur $\alpha = c$ cos. A. ζ; et $\beta = c$ sin. A. ζ erit $s = c\, e^{gv}$ sin. A $(hv + \zeta)$: in qua aequatione litterae g et h ex valoribus n et ν determinantur. Cum autem haec determinatio pendeat ab resolutione aequationis ν dimensionum, in qua omnes radices sint reales, manifestum est totidem valores pro s inventum iri:. At si aequationem $d^\nu s = \pm n s d v^\nu$ inspiciamus, facile intelligimus, si satisfaciant valores $s = P$, $s = Q$, $s = R$; etc. singulatim existentibus P, Q et R functionibus ipsius v, tum etiam satisfacere aequationem ex his coniunctam $s = \alpha P + \beta Q + \gamma R$; haecque aequatio integralis aeque late patebit ac differentialis proposita, si pro P, Q, R. omnes particulares ipsius s valores accipiantur.

§. 65. Percurramus igitur ordine singulos ipsius ν valores, et pro angulo 180 graduum ponamus π, ita vt sit $360° = 2\pi : 540° = 3\pi$ etc. Primum ergo sit $\nu = 1$, seu satisfiat aequationi $ds = m s dv$ eritque $\nu w = w = o$; atque hinc $g = f$, et $h = o$ et $m = f$; ex quo aequationis huius

$$d s = f s d v$$

erit aequatio integralis haec:

$$s = C e^{fv}$$

Quodſi autem ponatur $\nu w = w = \pi$, fiet $g = -f$; $h = o$; et $m = -f$, vnde prodit huius aequationis $d s = -f s d v$ integralis haec $s = C e^{-fv}$ quae quidem in praecedente iam continetur facto f negatiuo. Quare aequatio $s = C e^{\pm fv}$ omnes praebet curuas, quae ſimiles ſunt ſuis euolutis primis, quas iam oſtendimus eſſe logarithmicas ſpirales.

§. 66. Sit porro $\nu = 2$, ſeu integretur aequatio $d d s = m s d v^2$: atque primo ponatur $\nu w = 2 w = 0$, erit $w = 0$, et $g = f$, ac $h = 0$, atque $m = ff$, vnde huius aequationis $d d s = ff s d v^2$ integralis erit $s = C e^{fv}$. Secundo ſit $\nu w = 2 w = \pi$, erit $w = \frac{1}{2}\pi = 90°$; atque $g = 0$; $h = f$; et $m = -ff$: vnde aequationis $d d s = -ff s d v^2$ integralis erit $s = C$ ſin. A $(fv + \zeta)$. Tertio ſit $\nu w = 2 w = 2\pi$ ſeu $w = \pi = 180°$; erit $g = -f$; $h = 0$; et $m = ff$; vnde aequationis $d d s = ff s d v^2$ integralis eſt $s = C e^{-fv}$. Quarto ſit $\nu w = 2 w = 3\pi$ ſeu $w = \frac{3}{2}\pi$; erit $g = 0$; $h = -f$; et $m = -ff$, ex quo aequationis $d d s = -ff s d v^2$ integralis erit $s = C$ ſin. A $(\zeta - fv) = C$ ſin. A $(fv - \zeta)$ quae quidem aequatio cum ſuperiori caſu ſecundo inuenta congruit, vtraque enim continetur in forma α ſin. A. $fv + \beta$ coſ A. fv.

§. 67. Hinc itaque vtriusque aequationis differentialis ſecundi gradus $d d s = ff s d v^2$ et $d d s = -ff s d v^2$ completa nanciſcimur integralia, atque adeo curuas obtinemus omnes, quae ſint ſuis euolutis ſecundis ſimiles. Scilicet cum pro caſu priore duplex inuenta ſit aequatio integralis, ambo

ambo ipsius s valores per constantes quantitates multiplicati et inuicem coniuncti dabunt completum integrale. Sic aequationis huius:

$$dds = +ffsdv^2$$

integrale erit completum:

$$s = Ce^{fv} + De^{-fv}$$

At alterius aequationis

$$dds = -ffsdv^2$$

integrale completum erit hoc:

$$s = C \text{ fin. A.} fv + D \text{ cof. A.} fv$$

in vtroque enim integrali insunt duae nouae constantes C et D, quae ex duabus integrationibus sunt natae.

§. 68. Ponamus $\nu = 3$, ita vt integranda sit aequatio haec $d^3s = msdv^3$; ac primo ponatur $3w = 0$ seu $w = 0$ erit $g = f$, $h = 0$, et $m = f^3$ vnde aequationis $d^3s = hs^3dv^3$ integralis erit $s = Ce^{fv}$. Deinde sit $3w = \pi$ seu $w = \frac{1}{3}\pi = 60°$; erit $g = f$ cof A. $\frac{1}{3}\pi$ et $h = f$ fin. A. $\frac{1}{3}\pi$ atque $m = -f^3$, vnde aequationis $d^3s = -f^3s\,dv^3$ integralis erit $s = e^{fv \text{cof.A.}\frac{1}{3}\pi}(\alpha \text{ fin. A.} fv \text{ fin. A.} \frac{1}{3}\pi + \mathfrak{E} \text{ cof. A.} fv \text{ fin. A.} \frac{1}{3}\pi)$. Tertio sit $3w = 2\pi$ seu $w = \frac{2}{3}\pi = 120°$, erit $g = f$ cof. A. $\frac{2}{3}\pi$, $h = f$ fin. A. $\frac{2}{3}\pi$, et $m = f^3$, vnde aequationis $d^3s = f^3sdv^3$ integrale erit $s = e^{fv \text{ cof.} \text{A}\frac{2}{3}\pi}$ α fin. A fv fin. A $\frac{2}{3}\pi + \mathfrak{E}$ cof. A. fv fin. A. $\frac{2}{3}\pi$). Ex quibus huius aequationis

$$d^3s = +f^3sdv^3$$

prodit integrale completum.

$$s = Ce^{fv} + e^{fv \text{ cof.} \text{A}\frac{2}{3}\pi}(D \text{ fin. } A.\, fv \text{ fin. A}\tfrac{2}{3}\pi + E \text{ cof. A.} fv \text{ fin. A}\tfrac{2}{3}\pi)$$

Alterius vero aequationis differentialis

$$d^3 s = -f^3 s\,dv^3$$

integrale completum erit hoc

$$s = Ce^{-fv} + e^{fv\cos.A\frac{1}{3}\pi}(D\sin.A.fv\sin.A\tfrac{1}{3}\pi + E\cos.A.fv\sin.A\tfrac{1}{3}\pi$$

vbi notandum est esse sin. A $\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; sin. A $\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos. A $\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ et cos. A. $\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$.

§. 69. Ponamus nunc $\nu = 4$ seu hanc contemplemur aequationem $d^4 s = m s\,dv^4$, ac primo sit $4w = 0$, erit $g = f$, $h = 0$, et $m = f^4$ vnde fit $s = Ce^{fv}$. Deinde sit $4w = \pi$ seu $w = \frac{1}{4}\pi$ erit $g = f$ cos. A. $\frac{1}{4}\pi$ et $h = f$ sin. A. $\frac{1}{4}\pi$, atque $m = -f^4$ vnde fit $s = Ce^{fv\cos.A\frac{1}{4}\pi}$ sin. A $(fv$ sin. A. $\frac{1}{4}\pi + \zeta)$ hanc enim formam praestat adhibere quam alteram, in qua insuper cosinus arcus hv occurit. Tertio si ponatur $4w = 2\pi$ seu $w = \frac{2}{4}\pi$ erit $g = f$ cos. A $\frac{2}{4}\pi = 0$; $h = f$ sin. A $\frac{2}{4}\pi = f$ et $m = f^4$, vnde fit

$s = Ce^{fv\cos.A\frac{2}{4}\pi}$ sin. A $(fv$ sin. A $\frac{2}{4}\pi + \zeta)$. Quarto si ponatur $4w = 3\pi$ seu $w = \frac{3}{4}\pi$, fit iterum

$m = -f^4$ et $s = Ce^{fv\cos.A\frac{3}{4}\pi}$ sin. A $(fv$ sin. A. $\frac{3}{4}\pi + \zeta)$. Ex his igitur colligitur huius aequationis $d^4 s = -f^4 s\,dv^4$ integrale completum hoc:

$$s = Ce^{fv} + De^{fv\cos.A\frac{2}{4}\pi}\sin.A(fv\sin.A.\tfrac{2}{4}\pi + \delta) + Ee^{-fv}$$

Alterius vero aequationis huius $d^4 s = -f^4 s\,dv^4$ integrale completum erit hoc:

$$s = Ce^{fv\cos.A\frac{1}{4}\pi}\sin.A(fv\sin.A\tfrac{1}{4}\pi + \gamma) +$$
$$De^{fv\cos.A\frac{3}{4}\pi}\sin.A(fv\sin.A\tfrac{3}{4}\pi + \delta).$$

§. 70. Non opus est, vt haec vlterius prosequamur, cum tam ex his formis quam methodo ipsa iam pateat lex progressionis. Habebimus igitur generaliter huius aequatioquationis differentialis $d^{\nu} s = + f^{\nu} s\, d v^{\nu}$ iſtam aequationem integralem completam

$$s = C e^{fv} + D e^{fv \cos. A \frac{2}{\nu}\pi} (\sin. A (fv \sin. A \tfrac{2}{\nu}\pi + \delta) + E e^{fv \cos. A \frac{4}{\nu}\pi} \sin. A (fv \sin. A \tfrac{4}{\nu}\pi + \varepsilon) + F e^{fv \cos. A \frac{6}{\nu}\pi}$$

$$\sin. A (fv \sin. A \tfrac{6}{\nu}\pi + \zeta) + G e^{fv \cos. A \frac{8}{\nu}\pi} \sin. A (fv \sin. A \tfrac{8}{\nu}\pi + \eta)$$

etc. quos terminos quidem in infinitum continuare licet, at ſufficit eousque continuaſſe, quoad terminus occurrat primo ſimilis, id quod accidit ſumendis terminis vel $\frac{\nu+2}{2}$ vel $\frac{\nu+1}{2}$ prout ν fuerit numerus vel par vel impar.

§. 71. Simili modo integrale alterius aequationis differentialis indefiniti gradus erit comparatum

$$d^{\nu} s = - f^{\nu} s\, d v^{\nu}$$

huius ſcilicet aequationis integrale completum erit

$$s = C e^{fv \cos. A \frac{1}{\nu}\pi} \sin A (fv \sin. A \tfrac{1}{\nu}\pi + \gamma) + D e^{fv \cos. A \frac{3}{\nu}\pi}$$

$$\sin. A (fv \sin. A \tfrac{3}{\nu}\pi + \delta) + E e^{fv \cos. A \frac{5}{\nu}\pi} \sin A (fv \sin. A \tfrac{5}{\nu}\pi + \varepsilon)$$

$+$ etc. quam itidem non opus eſt in infinitum producere, cum ſumtis vel $\frac{\nu}{2}$ vel $\frac{\nu+1}{2}$ terminis iidem termini recurrant, ſequentesque iam in praecedentibus contineantur. Completum autem integrale vtriusque aequationis differentialis propoſitae cognoſcetur, ſi tot quantitates conſtantes C, D, E etc. γ, δ, ε etc. iam fuerint ingreſſae, quod ν continet vnitates. Deinde etiam iſto plures termini non accipientur, ſi π nusquam per fractionem vnitate maiorem multiplicetur.

§. 72. In vtraque igitur expreſſione integrali alii termini non continentur niſi huius formae

$$B e^{fv \cos. A \frac{\mu}{\nu}\pi} \sin. A (fv \sin. A \tfrac{\mu}{\nu}\pi + \beta)$$

 Neque

Neque vero tantum arcus curuarum quaesitarum s per huiusmodi formulas ipsius v exprimuntur, sed etiam abscissae et applicatae x et y. Cum enim sit $x = \int ds \,\text{sin.}\, A . v$ et $y = \int ds \,\text{cos.}\, A . v$; si pro s expressiones inuentae substituantur, hae formulae actu integrari poterunt. Namque formula generali assumta erit $ds = Be^{fv\,\text{cos.}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi} dv (f \,\text{cos.}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi . \text{sin.}\, A (fv \,\text{sin.}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta) + f \,\text{sin.}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi . \text{cos.}\, A (fv \,\text{sin.}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta))$, quae expressio, si pro B et β substituantur successiue litterae C, D, E etc. et γ, δ, ε, etc. itemque pro μ numeri vel 0, 2, 4, 6, etc. vel 1, 3, 5, 7, etc. prout vel prioris vel posterioris aequationis differentialis integrale desideratur, verum elementi ds valorem exhibet.

§. 73. Multiplicetur igitur istud differentiale ds primum per sin. Av, vt prodeat elementum dx, reperieturque integrando $x = Be^{fv\,\text{cos.}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi}$

$$\frac{\left(f^4 \,\text{sin.}\, A (fv \,\text{sin.}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta) \,\text{sin.}\, Av - f^3 \,\text{sin.}\, A (fv \,\text{sin}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta - \frac{\mu}{\nu}\pi) \,\text{cos.}\, Av - f \,\text{sin.}\, A (fv \,\text{sin}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta + \frac{\mu}{\nu}\pi) \,\text{cos.}\, Av + ff \,\text{sin.}\, A (fv \,\text{sin}\, A \frac{\mu}{\nu}\pi + \beta + \frac{2\mu}{\nu}\pi) \,\text{sin.}\, Av\right)}{f^4 + 2ff \,\text{cos.}\, A \frac{2\mu}{\nu}\pi + 1}$$

Simili modo cum per quantitates exponentiales, tum per sinus cosinusque arcuum circularium applicata y determinabitur idque per eandem variabilem v quae curuae amplitudinem designat, est enim $v = \int \frac{ds}{r}$. Ex quo intelligitur omnes omnino curuas, quae quampiam evolutam sui habeant similem concessis circuli et hyperbolae quadraturis construi posse.

§. 74.

§. 74. His ergo expoſitis problema initio propoſitum ſenſu latiſſimo acceptum poterimus reſoluere, et omnes curvas aſſignare quae ſimiles ſint ſuis euolutis cuiuscunque gradus. Hocque ipſo limites analyſeos non parum amplificaſſe iure mihi videor, cum aequationes differentiales altiorum graduum, ad quas peruenitur, non ſolum commode tractare ſed etiam integrare docuerim. Hac ſcilicet methodo non ſolum aequationum $d^{\nu}s = \pm f^{\nu}s\,dv^{\nu}$ integratio eſt in poteſtate, verum etiam earum aequationum, ex quibus hae ſunt ortae, quae ſunt $\pm ns = r$; $\pm ns = \frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$ etc. in infinitum. Quin etiam conſtructio omnium earum aequationum, quae ex his oriuntur quibuscunque adhibitis ſubſtitutionibus conſequitur, quae aliis viis omnino fruſtra tentantur, cuiusmodi aequationes iam nonnullas elicuimus.

§. 75. Quodſi ergo quaeratur curua, quae ſuae euolutae ordinis cuiuscunque ν ſit ſimilis, eiusque curuae arcus ponatur $= s$, radius osculi r, atque elementum amplitudinis $\frac{ds}{r} = dv$, obtinebitur poſito dv conſtante pro curua quaeſita vel haec aequatio $d^{\nu}s = +f^{\nu}s\,dv^{\nu}$ vel haec $d^{\nu}s = -f^{\nu}s\,dv^{\nu}$ quarum vtraque ita integrari poteſt, vt valor ipſius s per v definiatur, vti ex praecedentibus apparet. Inuenta autem hac aequatione integrali, innoteſcit mox radius osculi r, qui eſt $= \frac{ds}{dv}$; ac praeterea relatio inter coordinatas orthogonales poterit definiri; poſitis enim abſciſſa $= x$ et applicata $= y$ erit $x = \int ds\, \text{ſin.}\, v$, et $y = \int ds\, \text{coſ.}\, v$ quae ambae integrationes adeo actu perfici poſſunt.

§. 76.

§. 76. Vt igitur natura harum curuarum facile in conſpectum cadat, ſingula problemata breuiter repetere atque aequationes integrales inter s et v exhibere eſt viſum. Hic autem tantum ſimilitudinem directam conſideramus, quoniam ſimilitudo inuerſa ad directam reducitur, vt iam ſupra notauimus. Singula vero haec problemata, quibus curuae deſiderantur, quae ſuis euolutis dati ordinis ſint ſimiles, duplicem admittunt ſolutionem ob aequationem ambiguam $d^\nu s = \pm f^\nu s dv^\nu$. Quanquam enim haec ambiguitas, ſi ν eſt numerus impar, nullum diſcrimen infert, tamen ſi ν eſt par, ambo caſus a ſe inuicem maxime ſunt diuerſi, quocirca pro ſingulis problematis vtrumque caſum ſeorſim euoluemus.

Problema I.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis primis.

Solutio I. $ds = + f s dv$

et integrando

$$s = C e^{fv}$$

Solutio 2. $ds = - f s dv$

et integrando

$$s = C e^{-fv}$$

Problema II.

Inuenire curuas, quae ſimiles ſint ſuis euolutis ſecundis.

Solutio 1. $d^2 s = + f^2 s dv^2$

et integrando

$$s = C e^{fv} + D e^{-fv}$$

Solutio

Solutio 2. $d^2 s = -f^2 s\, dv^2$
et integrando
$$s = C \sin. A (fv + \gamma)$$

Problema III.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis tertiis.

Solutio 1. $d^3 s = + f^3 s\, dv^3$
et integrando
$$s = Ce^{fv} + De^{-\frac{1}{2}fv} \sin. A \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \delta\right)$$

Solutio 2. $d^3 s = - f^3 s\, dv^3$
et integrando
$$s = Ce^{\frac{fv}{2}} \sin A \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \gamma\right) + De^{-fv}$$

Problema IV.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis quartis.

Solutio 1. $d^4 s = + f^4 s\, dv^4$
et integrando
$$s = Ce^{fv} + D \sin A (fv + \delta) + Ee^{-fv}$$

Solutio 2. $d^4 s = - f^4 s\, dv^4$
et integrando
$$s = Ce^{\frac{fv}{\sqrt{2}}} \sin A \left(\frac{fv}{\sqrt{2}} + \gamma\right) + De^{\frac{-fv}{\sqrt{2}}} \sin. A \left(\frac{fv}{\sqrt{2}} + \delta\right)$$

Problema V.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis quintis.

 Solutio

Solutio 1. $d^5 s = + f^5 s d v^5$

et integrando

$$s = Ce^{fv} + De^{\frac{fv(\sqrt{5}-1)}{4}} \text{fin. A} \left(\frac{fv\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} + \delta\right) +$$

$$Ee^{\frac{-fv(\sqrt{5}+1)}{4}} \text{fin. A} \frac{fv\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4} + \varepsilon)$$

Solutio 2. $d^5 s = - f^5 s d v^5$.

et integrando

$$s = Ce^{\frac{fv(\sqrt{5}+1)}{4}} \text{fin. A} \left(\frac{fv\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4} + \gamma\right) + De^{\frac{-fv(\sqrt{5}-1)}{4}}$$

$$\text{fin. A} \left(\frac{fv\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} + \delta\right) + Ee^{-fv}$$

Problema VI.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis sextis.

Solutio 1. $d^6 s = + f^6 s d v^6$

et integrando

$$s = Ce^{fv} + De^{\frac{fv}{2}} \text{fin. A} \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \delta\right) + Ee^{\frac{-fv}{2}}$$

$$\text{fin A} \left(\frac{fv\sqrt{3}}{2} + \varepsilon\right) + Fe^{-fv}$$

Solutio 2. $d^6 s = - f^6 s d v^6$

et integrando

$$s = Ce^{\frac{fv\sqrt{3}}{2}} \text{fin. A} \left(\frac{fv}{2} + \gamma\right) + D \text{ fin. A} (fv + \delta) +$$

$$Ee^{\frac{-fv\sqrt{3}}{2}} \text{fin. A} \left(\frac{fv}{2} + \varepsilon\right)$$

§. 77. Concessa igitur peripheriae circuli sectione in partes aequales, problemata huius generis, quousque lubuerit continuari, atque facili negotio resolui possunt. Ita ad curuas

curuas definiendas, quae ſuis euolutis ſeptimis ſint ſimiles, noſſe oportet ſinus et coſinus partium ſeptimarum peripheriae circuli ſeu partium $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, quorum determinatio a reſolutione aequationis cubicae pendet. Cum autem in hoc negotio aequationum algebraicarum cuiusuis gradus reſolutio merito poſtuletur, tota methodus, quam ad huiusmodi problemata reſoluenda exhibuimus, nulla amplius laborat difficultate; neque aequationes differentiales cuiuscunque gradus moleſtiam afferent, ſed omnes aequali fere opera tractabuntur et conſtruentur.

§. 78. Quanquam autem per hanc methodum eae tantum curuae determinantur, quae cuipiam ex ſuis euolutis directe ſint ſimiles, tamen per eandem viam eas curuas quoque aſſignare licet, quae ſuis euolutis dati ordinis inverſe ſint ſimiles. Quodſi enim curua requiratur, quae ſuae euolutae ordinis ν inuerſe ſit ſimilis, atque aequatio inter s et v eo, quo ſupra vſi ſumus modo eruatur, reperietur ea eſſe $d^{2\nu}s = -f^{2\nu}s\,dv^{2\nu}$. Ita curuae, quae ſuis euolutis primis inuerſe ſunt ſimiles, continentur in aequatione $dds = -f^2 s\,dv^2$, et curuas, quae ſuis euolutis ſecundis inverſe ſimiles ſunt, complectitur aequatio $d^4 s = -f^4 s\,dv^4$ et ita porro: quae aequationes omnes methodo tradita tractari et integrari poſſunt.

§. 79. Denique praeterire non poſſum, quin moneam methodum hanc multo latius patere, quam ad eas tantum aequationes differentiales altiorum graduum, quae ſe in hoc negotio obtulerunt integrandas. Maximum enim eadem methodus praeſtat vſum in integratione infinitarum aliarum aequationum differentialium altiorum graduum; quae

 aliis

aliis viis fruſtra tractantur: cuiusmodi eſt aequatio haec $\alpha s = \frac{\beta ds}{dv} + \frac{\gamma dds}{dv^2} + \frac{\delta d^3 s}{dv_3} + \frac{\varepsilon d^4 s}{dv^4} +$ etc. poſito dv conſtante. Quousque enim etiam haec aequatio fuerit continuata, eius integrale ſeu valor finitus ipſius s per v ſemper poteſt exhiberi. Sed quoniam in hac diſſertatione tantum problema propoſitum de euolutarum ſimilitudine euoluere conſtitui, pleniorem huius methodi vſum alia occaſione declarabo.

DISSER-

DE SERIEBVS QVIBVSDAM CONSIDERATIONES.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Poſtquam inueniſſem ſerierum reciprocarum hac forma contentarum

$$1 \pm \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} \pm \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$$

vbi ambiguorum ſignorum ſuperiora valent, ſi n eſt numerus par, inferiora vero ſi n eſt numerus impar, ſummas a quadratura circuli pendere, ac per tantam peripheriae circuli π poteſtatem determinari, cuius exponens ſit $= n$; nonnullae ſe mihi obtulerunt obſeruationes, cum ad has ipſas ſeries, tum ad earum vſum in ſummandis aliis ſeriebus ſpectantes. Quae cum non admodum ſint obuiae, ac fortaſſe ad alia negotia vtilitatem non ſpernendam afferre queant, eas hic exponere non abs re fore ſum arbitratus.

§. 2. Poſita conſtanter ratione diametri ad circuli peripheriam vt 1 ad π, conſidero circulum, cuius radius ſeu ſemidiameter ſit $= 1$, et denotabit π eius ſemicircumferentiam ſeu arcum 180 graduum. Quod ſi nunc accipiatur in hoc circulo arcus $= s$, cuius ſinus ſit $= y$; coſinus $= x$, et tangens $= t$; erit

$$y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2....7} + \text{etc.}$$

$$x = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2....6} + \text{etc.}$$

 atque

atque hinc

$$o = t - s - \frac{s^2 t}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^4 t}{1.2.3.4} - \frac{s^5}{1.2...5} - \frac{s^6 t}{1.2....6} + \text{etc.}$$

feu

$$o = 1 - \frac{s}{t} + \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3t} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^5}{1.2...5t} - \frac{s^6}{1.2...6} + \text{etc.}$$

§. 3. Confideremus primo aequationem, qua relatio inter finum y et arcum s continetur, ac manifeftum eft, valorem s pro dato y non effe conftantem, fed omnes eos arcus denotare, quorum idem eft communis finus y. Sit arcuum horum minimus $= \frac{m}{n}\pi$, habebunt omnes fequentes arcus

$$\frac{m}{n}\pi, \quad \frac{n-m}{n}\pi, \quad \frac{2n+m}{n}\pi, \quad \frac{3n-m}{n}\pi, \quad \frac{4n+m}{n}\pi, \text{ etc.}$$
$$-\frac{n-m}{n}\pi; -\frac{2n+m}{n}\pi; -\frac{3n-m}{n}\pi, -\frac{4n+m}{n}\pi, -\frac{5n-m}{n}\pi \text{ etc.}$$

eundem communem finum y, Quocirca huius aequationis:

$$o = 1 - \frac{s}{1 \cdot y} + \frac{s^3}{1.2.3y} - \frac{s^5}{1.2....5y} + \frac{s^7}{1.2...7y} - \text{etc.}$$

habebuntur fequentes innumerabiles factores:

$$\left(1 - \frac{ns}{m\pi}\right)\left(1 + \frac{ns}{(n+m)\pi}\right)\left(1 - \frac{ns}{(n-m)\pi}\right)\left(1 + \frac{ns}{(2n-m)\pi}\right)\left(1 - \frac{ns}{(2n+m)\pi}\right)\text{etc.}$$

§. 4. Hinc itaque valores ipfius $\frac{1}{s}$ conftituent fequentem feriem:

$$\frac{n}{m\pi} + \frac{n}{(n-m)\pi} - \frac{n}{(n+m)\pi} - \frac{n}{(2n-m)\pi} + \frac{n}{(2n+m)\pi} + \frac{n}{(3n-m)\pi} - \text{etc.}$$

Horum itaque fumma aequalis erit coefficienti ipfius $-s$ in aequatione, qui eft $= \frac{1}{1y}$: Summa factorum ex binis erit $= o$, fumma ex ternis $= -\frac{1}{1...3y}$, etc. vti fequitur:

fumma terminorum	$=$	$\frac{1}{1y}$
fumm. fact. ex binis	$=$	o
fumm. fact. ex ternis	$=$	$\frac{-1}{1.2.3y}$
fumm. fact. ex quaternis	$=$	o

fum.

summ. fact. ex quinis $= \frac{1}{1.2.\ldots 5y}$
summ. fact. ex senis $= 0$
summ. fact. ex septenis $= \frac{-1}{1.\ldots 4.5.\ldots 7y}$
summ. fact. ex octonis $= 0$
etc.

§ 5. Quod si autem generatim seriei cuiuscunque $a + b + c + d + e +$ etc. fuerit

summa ipsorum terminorum $= \alpha$
summa factorum ex binis $= \beta$
summa factorum ex ternis $= \gamma$
summa factorum ex quaternis $= \delta$
summa factorum ex quinis $= \varepsilon$
summa factorum ex senis $= \zeta$
etc.

poterunt ex his summae quadratorum, cuborum, biquadratorum, et potestatum quarumuis terminorum huius seriei assignari. Quodsi enim sit

$$a + b + c + d \text{ etc.} = A$$
$$a^2 + b^2 + c^4 + d^2 + \text{etc.} = B$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} = C$$
$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{etc.} = D$$
$$a^5 + b^5 + c^5 + a^5 + \text{etc.} = E$$
$$a^6 + b^6 + c^6 + a^6 + \text{etc.} = F$$
etc.

sequenti modo istarum summarum valores determinabuntur.

$$A = \alpha$$
$$B = \alpha A - 2\beta$$
$$C = \alpha B - \beta A + 3\gamma$$
$$D = \alpha C - \beta B + \gamma A - 4\delta$$

E =

$$E = \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + 5\varepsilon$$
$$F = \alpha E - \beta D + \gamma C - \delta B + \varepsilon A - 6\zeta$$
etc.

Quae progreſſio cum facilem legem teneat, et ex terminis praecedentibus quiuis terminus expedite definiri poſſit, poterimus ſeriei ſuperioris valores ipſius $\frac{z}{\epsilon}$ exhibentis ſummam poteſtatum quarumcunque terminorum definire.

§. 6. Antequam autem hanc generalem progreſſionem reliquamus, notari conueniet ſingularem proprietatem, quam valores litterarum A, B, C, D etc. interſe tenent. Oriuntur ii ſcilicet ex evolutione huius expreſſionis

$$\frac{\alpha - 2\beta z + 3\gamma z^2 - 4\delta z^3 + 5\varepsilon z^4 - 6\zeta z^5 + 7\eta z^6 - \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \zeta z^6 - \text{etc.}}$$

ſi quidem per diuiſionem actualem quotus ſecundum poteſtates ipſius z eruatur. Prodibit namque diuiſione conſueto more inſtituta ſequens quotus $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ etc. ita vt iſta ſeries aequalis ſit illi fractioni. Praeterea notandum eſt, ſi ſeriei $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 -$ etc. ſumma ponatur $= Z$, ita vt ſit Z denominator illius fractionis, fore numeratorem $= \frac{-dZ}{bz}$. Ex quo ſeriei $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. ſumma erit $= \frac{-dZ}{Zdz}$. Non ſolum itaque ex datis factis binorum, ternorum, quaternorum etc. ſummae poteſtatum ſeriei propoſitae $a + b + c + d +$ etc. ſcilicet valores litterarum A, B, C, D, etc. poterunt inueniri, ſed etiam ſumma ſeriei, quam hae ipſae poteſtates in nouam progreſſionem geometricam reſpecti-

ſpectiue ducti, nimirum huius ſeriei
$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. ſumma poterit aſſignari. Hancque proprietatem probe notaſſe in ſequentibus plurimum iuuabit, vbi in nouas ſeries ſumus inquiſituri.

§. 7. Cum igitur huius ſeriei:

$$\frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \text{etc.}\right)$$

dentur primo ipſorum terminorum ſumma, tum etiam ſummae factorum ex binis, ternis, quaternis et ita porro,

$$A = \frac{1}{1y}$$
$$B = \frac{A}{1y}$$
$$C = \frac{B}{1y} - \frac{1}{1\cdot 2y}$$
$$D = \frac{C}{1y} - \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3y}$$
$$E = \frac{D}{1\cdot y} - \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4y}$$
$$F = \frac{E}{1y} - \frac{C}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y}$$
$$G = \frac{F}{1y} - \frac{D}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6y} \quad \text{etc.}$$

crit vt ſequitur

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \text{etc.} = \frac{A\pi}{n}$$
$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{n^2}$$
$$\frac{1}{m^3} + \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} + \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{n^2}$$
$$\frac{1}{m^4} + \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{n^4}$$
$$\frac{1}{m^5} + \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} + \text{etc.} = \frac{E\pi^5}{n^5}$$
$$\frac{1}{m^6} + \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(2n-m)^6} + \frac{1}{(2n+m)^6} + \text{etc.} = \frac{F\pi^6}{n^5}$$

etc.

vbi pro poteſtatibus paribus omnes termini habent ſignum $+$, pro imparibus vero ſigna conueniunt cum ſignis ipſius ſeriei primae.

§. 8. Retineant litterae A, B, C, D, E, etc. valores, quos ipſis modo tribuimus, ſitque nobis haec ſeries propoſita

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \text{ etc.}$$

cuius ſummam ex regula §. 6 data inueſtigemus. Huius autem ſeriei ſumma inde eſt $= \frac{-dZ}{Zdz}$ exiſtente $Z = 1 - \frac{z}{1y} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3 y} - \frac{z^5}{1\cdot 2 \ldots 5 y} + \frac{z^7}{1\cdot 2 \ldots 7 y} - \text{etc.} = 1 - \frac{1}{y} \text{ſin. A}\,.\,z$. Ex quo ob y hoc loco conſtans ponendum erit $dZ = \frac{-dz\, cof. A z}{y}$ ac propterea ſumma ſeriei propoſitae

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc}$$

erit $= \frac{cof. A\,.\,z}{y - ſin. A z}$. Hinc erit iſtius ſeriei ſumma $Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.} = \frac{z\, cof. A\,.\,z}{y - ſin. A z}$.

§. 9. Sit $z = \frac{p\pi}{n}$, exprimet haec ſeries ſummam omnium harum ſerierum:

$$+\frac{p}{m} + \frac{p}{n-n} - \frac{p}{n+m} - \frac{p}{2n-m} + \frac{p}{2n+m} + \text{etc.}$$
$$+\frac{p^2}{m^2} + \frac{p^2}{(n-m)^2} + \frac{p^2}{(n+m)^2} + \frac{p^2}{(2n-m)^2} + \frac{p^2}{(2n+m)^2} + \text{etc.}$$
$$+\frac{p^3}{m^3} + \frac{p^3}{(n-m)^3} - \frac{p^3}{(n+m)^3} - \frac{p^3}{(2n-m)^3} + \frac{p^3}{(2n+m)^3} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Hae autem ſeries verticaliter additae dant

$$\frac{p}{m-p} + \frac{p}{n-m-p} - \frac{p}{n+n+p} - \frac{p}{2n-m+p} + \frac{p}{2n+m-p} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei igitur ſumma eſt $= \frac{p\pi\, cof. A\,.\,\frac{p\pi}{n}}{ny - n\, ſin. A\,.\,\frac{p\pi}{n}}$ ſeu cum

y ſit

y ſit ſinus arcus $\frac{m\pi}{n}$, habebitur iſtius ſeriei ſumma

$$= \frac{p\pi\, cof.\, A\,.\, \frac{p\pi}{n}}{n\, ſin.\, A\frac{m\pi}{n} - n\, ſin.\, A\,.\, \frac{p\pi}{n}}.$$

Quod ſi ponatur $m - p = a$ et $m + p = b$ ita vt ſit $m = \frac{a+b}{2}$ et $p = \frac{b-a}{2}$ prodibit huius ſeriei

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{n-b} - \frac{1}{n+b} - \frac{1}{2n-a} + \frac{1}{2n+a} + \frac{1}{3n-b} - \frac{1}{3n+b} - \text{etc.}$$

ſiue huius

$$\frac{1}{a} + \frac{2b}{n^2-b^2} - \frac{2a}{4n^2-a^2} + \frac{2b}{9n^2-b^2} - \frac{2a}{16n^2-a^2} + \frac{2b}{25n^2-b^2} - \text{etc.}$$

$$\text{ſumma} = \frac{\pi\, cof.\, A\, \frac{(b-a)\pi}{2n}}{n\, ſin.\, A\,.\, \frac{(b+a)\pi}{2n} - n\, ſin.\, A\, \frac{(b-a)\pi}{2n}}$$

§. 10. Verum haec nimis ſunt generalia, vt difficulter omnia, quae in iis comprehenduntur, perſpici queant. Quamobrem ad ſpecialiora deſcendamus, ac ponamus ſinum $y =$ ſinui toti $= 1$: erit $m = 1$ et $n = 2$. Hinc igitur ſequentes nanciſcimur ſeries

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \text{etc.} = \frac{A\pi}{2}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{2^2}$$

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{2^3}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{2^4}$$

etc.

ſeu hae

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{A\pi}{2^2}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{2^3}$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{2^4}$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{2^5}$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{etc.} = \frac{E\pi^5}{2^6}$$
$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.} = \frac{F\pi^6}{2^7}$$
$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{etc.} = \frac{G\pi^7}{2^8}$$
$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} = \frac{H\pi^8}{2^9}$$

etc.

Valores autem litterarum A. B, C, D etc. ex sequenti lege inuenientur.

$$A = 1$$
$$B = \frac{A}{1}$$
$$C = \frac{B}{1} - \frac{1}{1\cdot 2}$$
$$D = \frac{C}{1} - \frac{A}{1.2.3}$$
$$E = \frac{D}{1} - \frac{B}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$$
$$F = \frac{E}{1} - \frac{C}{1.2.3} + \frac{A}{1.2.3.4.5}$$
$$G = \frac{F}{1} - \frac{D}{1.2.3} + \frac{B}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2\ldots6}$$
$$H = \frac{G}{1} - \frac{E}{1.2.3} + \frac{C}{1.2.3.4.5} - \frac{A}{1.2\ldots7}.$$

etc.

vnde reperiuntur sequentes valores litterarum

$$A = 1 \cdot \frac{\pi}{2^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$
$$B = \frac{1}{1} \cdot \frac{\pi^2}{2^3} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}$$
$$C = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{\pi^3}{2^4} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.}$$
$$D = \frac{2}{1.2.3} \cdot \frac{\pi^4}{2^5} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}$$
$$E = \frac{5}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^5}{2^6} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \text{etc.}$$
$$F = \frac{16}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{\pi^6}{2^7} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}$$
$$G = \frac{61}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{\pi^7}{2^8} = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \text{etc.}$$
$$H = \frac{272}{1.2.3\ldots7} \cdot \frac{\pi^8}{2^9} = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.}$$

I =

$$I = \frac{1385}{1.2.3\ldots.8} \cdot \frac{\pi^9}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \text{etc.}$$
$$K = \frac{7936}{1.2.3\ldots.9} \cdot \frac{\pi^{10}}{2^{11}} = 1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{etc.}$$
$$L = \frac{50521}{1.2.3\ldots.10} \cdot \frac{\pi^{11}}{2^{12}} = 1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{7^{11}} + \text{etc.}$$
$$M = \frac{353792}{1.2.3\ldots.11} \cdot \frac{\pi^{12}}{2^{13}} = 1 + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{7^{12}} + \text{etc.}$$
$$N = \frac{2702765}{1.2.3\ldots.12} \cdot \frac{\pi^{13}}{2^{14}} = 1 - \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{5^{13}} + \frac{1}{7^{13}} + \text{etc.}$$
$$O = \frac{22368256}{1.2.3\ldots.13} \cdot \frac{\pi^{14}}{2^{15}} = 1 + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \frac{1}{7^{14}} \text{ etc.}$$

§. 11. Denotant hic litterae A, B, C, etc. numerales tantum coefficientes poteſtatum π per poteſtates binarii diuiſarum: quarum valores etſi ſatis commode ex lege data definiri poſſunt, tamen alia lex poteſt exhiberi, quae magis ad calculum videtur expedita. Conſidero ſcilicet ſeriem $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. cuius ſumma, quae tantisper deſignetur littera s, eſt per §. 8. $= \frac{cof. A.z}{1 - fin. AZ}$, ob $y = 1$. Quod ſi igitur ex hac aequatione $s = \frac{cof. A \cdot z}{1 - fin. A \cdot z}$ valor ipſius s in ſerie exprimatur, quae ſecundum poteſtates ipſius z progrediatur, prodire debebit ipſa ſeries $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc. Nulla enim alia ſeries ſimilis formae puta $P + Qz + Rz^2 + Sz^3$ $+$ etc. aſſignari poteſt aequalis illi $A + Bz + Cz^2$ $+ Dz^3 +$ etc quin ſimul coefficientes poteſtatum z congruant, ſitque $P = A$; $Q = B$; $R = C$; $S = D$, etc. At vero exprimit $\frac{cof. A z}{1 - fin. A z}$ tangentem arcus $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}$ ſeu erit $s =$ tang. A $(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2})$ et hancobrem conuertendo $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}$ $=$ A tang. $s = \int \frac{ds}{1 + ss}$ ſumtisque differentialibus ob $\frac{\pi}{4}$ conſtans ſeu arcum 45 graduum, habebitur $\frac{dz}{2} = \frac{ds}{1 + ss}$ ſiue $dz + ssdz = 2ds$. Nunc ponatur $s = A + Bz + Cz^2$ $+ Dz^3 + Ez^4 +$ etc. erit

$$\frac{2ds}{dz} = 2B + 4Cz + 6Dz^2 + 8Ez^3 + 10Fz^4 + \text{etc.}$$
$$ss = A^2 + 2ABz + 2ACz^2 + 2ADz^3 + 2AEz^4 + \text{etc.}$$
$$1 = +1 \qquad + B^2z^2 + 2BCz^3 + 2BDz^4 + \text{etc.}$$
$$+ C^2z^4 + \text{etc.}$$

Comparatis nunc terminis homogeneis inter ſe valores litterarum ita definiantur, vt coefficientes ſingularum poteſtatum ipſius z euaneſcant; atque ſequentes litterarum A, B, C, D, E, etc. obtinebuntur determinationes, exiſtente vt iam inuenimus $A = 1$.

$$A = 1$$
$$B = \frac{A^2+1}{2}$$
$$C = \frac{2AB}{4}$$
$$D = \frac{2AC+B^2}{6}$$
$$E = \frac{2AD+2BC}{8}$$
$$F = \frac{2AE+2BD+C^2}{10}$$
$$G = \frac{2AF+2BE+2CD}{12}$$
$$H = \frac{2AG+2BF+2CE+D^2}{14}$$
etc.

Atque hinc eaedem prorſus determinationes litterarum A, B, C, D etc. prodibunt, quas altera lex ſupra data §. 10 ſuppeditat.

§. 12. Cum denominatores fractionum, quibus litterae A, B, C, D, etc. aequales ſunt inuentae, ſatis regulariter progrediantur, poteſt hinc peculiaris regula ad inueniendos numeratores reperiri: Ponamus enim

A =

$A = \alpha$	$F = \frac{\zeta}{1.2.3.4.5}$
$B = \frac{\beta}{1}$	$G = \frac{\eta}{1.2.3.4.5.6}$
$C = \frac{\gamma}{1.2}$	$H = \frac{\theta}{1.2.3 \ldots\ldots 7}$
$D = \frac{\delta}{1.2.3}$	$I = \frac{\iota}{1.2.3 \ldots\ldots 8}$
$E = \frac{\varepsilon}{1.2.3.4}$	$K = \frac{\varkappa}{1.2.3 \ldots\ldots 9}$ etc.

eritque factis ſubſtitutionibus haec lex:

$\alpha = 1$	$\varepsilon = \alpha\delta + 3\beta\gamma$
$\beta = \frac{\alpha^2+1}{2}$	$\zeta = \alpha\varepsilon + 4\beta\delta + 3\gamma^2$
$\gamma = \alpha\beta$	$\eta = \alpha\zeta + 5\beta\varepsilon + \frac{5.4}{1.2}\gamma\delta$
$\delta = \alpha\gamma + \beta^2$	$\theta = \alpha\eta + 6\beta\zeta + \frac{6.5}{1.2}\gamma\varepsilon + \frac{6.5.4}{1.2.3} \cdot \frac{\delta^2}{2}$

$$\iota = \alpha\theta + 7\beta\eta + \frac{7.6}{1.2}\gamma\zeta + \frac{7.6.5}{1.2.3}\delta\varepsilon$$

$$\varkappa = \alpha 2 + 8\beta\theta + \frac{8.7}{1.2}\gamma\eta + \frac{8.7.6}{1.2.5}\delta\zeta + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Lex haec perſpicua eſt, ſi hoc modo notetur, quoties poſtremus terminus ſit quadratum, eum inſuper per binarium diuidi debere.

§. 13. Conſideremus nunc hanc ſeriem:

$$Az + Bz^2 + Gz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

cuius ſummam conſtat eſſe $= \frac{z\, cof.\, A.z}{1 - fin.\, A.z}$, ac ponatur

$$z = \frac{p\pi}{2}, \text{ erit } \frac{p\pi\, cof.\, A \,.\, \frac{p\pi}{2}}{2 - 2\, fin.\, A \,.\, \frac{p\pi}{2}} =$$

$$\frac{A\pi}{2^2} \cdot 2p + \frac{B\pi^2}{2^3} \cdot 2p^2 + \frac{C\pi^3}{2^4} \cdot 2p^3 + \frac{D\pi^4}{2^5} \cdot 2p^4 + \text{etc.}$$

$$\text{ſeu } \frac{\pi\, cof.\, A\, \frac{p\pi}{2}}{4 - 4\, fin.\, A \,.\, \frac{p\pi}{2}} = \frac{A\pi}{2^2} + \frac{pB\pi^2}{2^3} + \frac{p^2C\pi^3}{2^4} + \frac{p^3D\pi^4}{2^5} + \text{etc.}$$

Quodſi ergo loco ſingulorum terminorum ſubſtituantur ſeries

ries ex §. 10 prodibit $\frac{\pi \, cos. \, A. \frac{p\pi}{2}}{4-4 sin. A. \frac{p\pi}{2}} =$

$$+1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \text{etc.}$$
$$+p + \tfrac{p}{3^2} + \tfrac{p}{5^2} + \tfrac{p}{7^2} + \tfrac{p}{9^2} + \text{etc.}$$
$$+p^2 - \tfrac{p^2}{3^3} + \tfrac{p^2}{5^3} + \tfrac{p^2}{7^3} + \tfrac{p^2}{9^3} - \text{etc.}$$
$$+p^3 + \tfrac{p^3}{3^4} + \tfrac{p^3}{5^4} + \tfrac{p^3}{7^4} + \tfrac{p^3}{9^4} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Omnes autem hae feries deorfum additae abeunt in hanc:

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{3+p} + \frac{1}{5-p} - \frac{1}{7+p} + \frac{1}{9-p} - \text{etc.}$$

cuius adeo fumma eft $= \frac{\pi \, cos. \, A. \frac{p\pi}{2}}{4-4 sin. A. \frac{p\pi}{2}}$.

§. 14. Plures huius generis feries fummabiles derivare licebit ex §. 9. ferie fub finem expofita. Ponamus $a = b = m$: et habebimus hanc

$$\frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} + \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} + \frac{2m}{25n^2-m^2} - \text{etc.}$$

cuius fumma erit $= \frac{\pi}{n \, sin. \, A. \frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{m}$ ob $cos. \, A. 0\pi = 1$ et $sin. \, A. 0\pi = 1$. Quamobrem habebitur, fi per $2m$ diuidatur

$$\frac{1}{n^2-m^2} - \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} - \frac{1}{16n^2-m^2} + \frac{1}{25n^2-m^2} - \text{etc.}$$

$= \frac{\pi}{2mn \, sin. \, A. \frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{2mm}$. Ponamus porro $a = -m$ et $b = +m$, ac proueniet $-\frac{\pi \, cos. \, A. \frac{m\pi}{n}}{n \, sin. \, A. \frac{m\pi}{n}} + \frac{1}{m} =$

$$\frac{2m}{n^2-m^2} + \frac{2m}{4n^2-m^2} + \frac{2m}{9n^2-m^2} + \frac{2m}{16n^2-m^2} + \frac{2m}{25n^2-m^2} + \text{etc.}$$

feu

seu facta diuisione per 2 m, erit $\frac{1}{2m^2} - \frac{\pi \cos A . \frac{m\pi}{n}}{2mn \sin. A . \frac{m\pi}{n}}$

$= \frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \frac{1}{25n^2-m^2} + \text{etc.}$

Quoties itaque euenit vt $\cos. A . \frac{m\pi}{n}$ euanescat, toties seriei summa algebraice erit assignabilis quippe $= \frac{1}{2m^2}$. Fit autem hoc, si fuerit $\frac{m}{n} = \frac{2i+1}{2}$ seu $m = 2i+1$, et $n = 2$ vnde erit:

$\frac{1}{2(2i+1)^2} = \frac{1}{4-(2i+1)^2} + \frac{1}{16-(2i+1)^2} + \frac{1}{36-(2i+1)^2} + \frac{1}{64-(2i+1)^2}$ etc.

Ex quo sequens oritur propositio paradoxa: esse scilicet

$\frac{1}{4-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{36-p} + \frac{1}{64-p} + \frac{1}{100-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p}$

quoties fuerit p numerus quadratus integer et impar.

§. 15. Ponamus $n = 1$, atque $m^2 = p$, erit

$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{2p \sin. A . \pi\sqrt{p}} - \frac{1}{2p}$

$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p} \cos. A . \pi\sqrt{p}}{2p \sin. A . \pi\sqrt{p}}$

quae series si addantur sequitur fore:

$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p} \sin. v A . \pi\sqrt{p}}{4p \sin. A . \pi\sqrt{p}}$

at si eaedem a se inuicem subtrahantur; erit

$\frac{1}{4-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{36-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}(1+\cos. A . \pi\sqrt{p})}{4p \sin. A . \pi\sqrt{p}}$

At est $\frac{\sin vA . \pi\sqrt{p}}{\sin. A . \pi\sqrt{p}} = \text{tang. } A . \frac{\pi\sqrt{p}}{2}$ et $\frac{1+\cos. A \pi\sqrt{p}}{\sin A \pi\sqrt{p}} = \cos. A . \frac{\pi\sqrt{p}}{2}$ ex quo summae posteriores simpliciores reddentur.

§. 16. Possumus itaque hinc summare sequentes series $\frac{1}{1-p} \pm \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} \pm \frac{1}{16-p} + \text{etc.}$ si quidem p significet numerum affirmatiuum quemcunque. At si loco p substituatur numerus negatiuus puta $-q$, tum fiunt tam sinus et cosinus, quam ipsi arcus $\pi\sqrt{p}$ seu $\pi\sqrt{-q}$ quantitates imaginariae. Cum autem summae serierum nihilo minus maneant reales et finitae, imaginaria sese destruent. Quamobrem inuestigari conueniet, cuiusmodi quantitates reales in his formis $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin. A\pi\sqrt{-q}}$ et $\frac{\pi\sqrt{-q}}{tang. A.\pi\sqrt{-q}}$ contineantur. Ad hoc ponamus $u = \frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin. A.\pi\sqrt{-q}}$ eritque $\sin. A.\pi\sqrt{-q} = \frac{\pi\sqrt{-q}}{u}$ et $\pi\sqrt{-q} = A \sin. \frac{\pi\sqrt{-q}}{u}$; sumantur differentialia positis π et u variabilibus, habebitur $d\pi = \frac{ud\pi - \pi - \pi du}{u\sqrt{(uu + q\pi^2)}}$. Ponatur $u = \pi v$, prodibit $d\pi = \frac{-dv}{v\sqrt{(q+vv)}}$ et $\pi = \frac{1}{\sqrt{q}} l \frac{\sqrt{q} + \sqrt{(q+vv)}}{cv}$. Hinc erit $e^{\pi\sqrt{q}} cv = \sqrt{q} + \sqrt{(q+vv)}$ et $v = \frac{2e^{\pi\sqrt{q}}c\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}c^2 - 1}$ atque $u = \frac{2\pi e^{\pi\sqrt{q}}c\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}c^2 - 1}$. Constans autem c ita debet esse comparata vt facto $\pi = 0$ fiat $u = 1$ ex quo fit $c = 1$ Quamobrem erit $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin. A.\pi\sqrt{-q}} = \frac{2e^{\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}$. Simili modo ponatur $\frac{\pi\sqrt{-q}}{tang. A.\pi\sqrt{-q}} = \frac{\pi}{v}$ erit $v\sqrt{-q} = tang. A.\sqrt{-q}$ et $\pi\sqrt{-q} = A\,tang.\, v\sqrt{-q}$ ac differentiando $d\pi = \frac{dv}{1-qvv}$. Integretur denuo, erit $\pi = \frac{1}{2\sqrt{q}} l \frac{1+v\sqrt{q}}{1-v\sqrt{q}}$ et $e^{2\pi\sqrt{q}} - e^{2\pi\sqrt{q}}v\sqrt{q} = 1 + v\sqrt{q}$, vnde fit $v = \frac{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}{(e^{2\pi\sqrt{q}} + 1)\sqrt{q}}$ atque

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{tang. A.\pi\sqrt{-q}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{q}}+1)\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}.$$

§. 17. Nacti igitur sumus octo sequentes series, quarum summae assignari possunt, quas cum summis conspectui exponemus

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} - \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} - \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{2p \sin. A.\pi\sqrt{p}} - \frac{1}{2p}$$

$$\frac{1}{1-p} + \frac{2}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}}{2p\, tang. A.\pi\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{25-p} + \frac{1}{49-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{4p \cos. A.\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}$$

$\frac{1}{4-p}$

$$\frac{1}{4-p}+\frac{1}{16-p}+\frac{1}{36-p}+\frac{1}{64-p}+\text{etc.}=\frac{1}{2p}-\frac{\pi\sqrt{p}}{4p\,tang.A.\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}$$

$$\frac{1}{1+q}-\frac{1}{4+q}+\frac{1}{9+q}-\frac{1}{16+q}+\text{etc.}=\frac{1}{2q}-\frac{e^{\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)q}$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{1}{4+q}+\frac{1}{9+q}+\frac{1}{16+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{2\pi\sqrt{q}}+1)\pi\sqrt{q}}{2(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)q}-\frac{1}{2q}$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{1}{9+q}+\frac{1}{25+q}+\frac{1}{49+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{q}}-1)\pi\sqrt{q}}{4(e^{\pi\sqrt{q}}+1)q}$$

$$\frac{1}{4+q}+\frac{1}{16+q}+\frac{1}{36+q}+\frac{1}{64+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{q}}+1)\pi\sqrt{q}}{4(e^{\pi\sqrt{q}}-1)q}-\frac{1}{2q}$$

§. 18. Cum supra legem exhibuerim, qua summae potestatum omnium terminorum huius seriei

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\text{etc.}$$

progrediuntur, inuestigabo nunc legem, quam potestates impares tantum inter se tenent, quo hae summae sine cognitione parium, quousque libuerit, continuari possint; sit itaque

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\text{etc.}=A\pi$$
$$1-\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{5^3}-\tfrac{1}{7^3}+\tfrac{1}{9^3}-\text{etc.}=B\pi^3$$
$$1-\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{5^5}-\tfrac{1}{7^5}+\tfrac{1}{9^5}-\text{etc.}=C\pi^5$$
$$1-\tfrac{1}{3^7}+\tfrac{1}{5^7}-\tfrac{1}{7^7}+\tfrac{1}{9^7}-\text{etc.}=D\pi^7$$
$$1-\tfrac{1}{3^9}+\tfrac{1}{5^9}-\tfrac{1}{7^9}+\tfrac{1}{9^9}-\text{etc.}=E\pi^9$$

etc.

atque inuestiganda erit lex, qua coefficientes A, B, C, D etc. progrediuntur. Hunc in finem considero hanc seriem $A\pi z+B\pi^3z^3+C\pi^5z^5+D\pi^7z^7+$ etc. cuius summa sit $=s$; erit ergo his seriebus per respondentes potestates ipsius z multiplicatis respectiue;

 $s=$

$s = \frac{z}{1-zz} - \frac{3z}{9-zz} + \frac{5z}{25-zz} - \frac{7z}{49-zz} +$ etc. et

$\frac{2s}{z} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} + \frac{1}{5+z}$ etc.

Cum autem ex §. 9. fit $\frac{\pi \text{ cof. A} \frac{(b-a)\pi}{2n}}{n \text{ fin. A}. \frac{(b+a)\pi}{2n} - n \text{ fin. A}. \frac{(b-a)\pi}{2n}} =$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{n-b} - \frac{1}{n+b} - \frac{1}{2n-a} + \frac{1}{2n+a} + \frac{1}{3n-b} - \frac{1}{3n+b} -$ etc.

fiat $a = 1 - z$; $n = 2$; et $b = 1 - z$; atque haec feries tranfibit in illam; ex quo prodibit

$\frac{2s}{z} = \frac{\pi}{2 \text{ fin. A}. \frac{(1-z)\pi}{2}}$ et $s = \frac{\pi z}{4 \text{ fin. A}. \frac{(1-z)\pi}{2}}$ fiue $s =$

$\frac{\pi z}{4 \text{ cof. A}. \frac{\pi z}{2}} = \frac{\frac{\pi z}{4}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} - \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2^6} + \text{etc.}}$

quae fractio cum, fi actu diuidatur, ipfam affumtam feriem $A\pi z + B\pi^3 z^3 + C\pi^5 z^5 +$ etc. reproducere debeat, erit:

$A = \frac{1}{4}$

$B = \frac{A}{2.4}$

$C = \frac{B}{2.4} - \frac{A}{2.4.6.8}$

$D = \frac{C}{2.4} - \frac{B}{2.4.6.8.} + \frac{A}{2.4.6.8.10.12}$

$E = \frac{D}{2.4} - \frac{C}{2.4.6.8.} + \frac{B}{2.4.6.8.10.12} - \frac{A}{2.4.6.\ldots16}$

etc.

§ 19. Vel fi ponatur:

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc} = \frac{A\pi}{2^2}$

$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{B\pi^3}{2^4}$

$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \text{etc.} = \frac{C\pi^5}{2^6}$

$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \text{etc.} = \frac{D\pi^7}{2^8}$

etc.

coeffi-

coefficientes A, B, C, etc. hanc tenebunt legem:

$$A = 1$$
$$B = \frac{A}{1.2}$$
$$C = \frac{B}{1.2} - \frac{A}{1.2.3.4}$$
$$D = \frac{C}{1.2} - \frac{B}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.\ldots.6}$$
$$E = \frac{D}{1.2} - \frac{C}{1.2.3.4} + \frac{B}{1.2.\ldots.6} - \frac{A}{1.2.\ldots.8}$$

Quodsi autem illae feries retro continuentur, vt ad poteſtates affirmatiuas deueniatur, erunt omnium illarum ſerierum ſummae $= 0$; ita vt etiamſi in his formis vlterius progrederemur, tamen alii valores non prodituri eſſent. Eſt ſcilicet

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \text{etc.} = 0$$
$$1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \text{etc.} = 0$$
$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - \text{etc.} = 0$$
$$1 - 3^7 + 5^7 - 7^7 + 9^7 - \text{etc.} = 0$$

§. 20. Quemadmodum autem ſummae poteſtatum imparium peculiarem inter ſe tenent progreſſionis legem, ita etiam poteſtates pares ſimili proprietate gaudent, vt omnes ex ſe ipſis ſine ſubſidio poteſtatum imparium definiri queant. Quam legem vt eruamus, ſimili vtamur operatione. Sit igitur

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = A\pi^2$$
$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = B\pi^4$$
$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.} = C\pi^6$$
$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} = D\pi^8$$

ac inueſtigetur ſumma huius ſeriei:

$$A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.} = s,$$

erit $s = \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^2}{9-z^2} + \frac{z^2}{25-z^2} + \frac{z^2}{49-z^2} + \text{etc.}$ vnde ex

I 3 §. 17.

§. 17. fiet $s = \frac{\pi z}{4 \cos. A \frac{\pi z}{2}}$; siue per seriem

$$s = \frac{\frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2^3} - \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^5} + \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^7} - \text{etc.}}{1 = \frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} + \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} - \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2^6} + \text{etc.}}$$

ex qua diuisione cum ipsa series assumta oriri debeat, erit

$$A = \tfrac{1}{8}$$
$$B = \frac{A}{2.4} - \frac{1}{2.4.6.4}$$
$$C = \frac{B}{2.4} - \frac{A}{2.4.6.8} + \frac{1}{2.4.6.8.10.4}$$
$$D = \frac{C}{2.4} - \frac{B}{2.4.6.8} + \frac{A}{2.4.6 \ldots 12} - \frac{1}{2.4 \ldots 14.4}$$

etc.

§. 21. Lex haec facilius inspicietur, si ponatur

$$1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.} = A \tfrac{\pi^2}{2^3}$$
$$1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.} = B \tfrac{\pi^4}{2^5}$$
$$1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \text{etc.} = C \tfrac{\pi^6}{2^7}$$
$$1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \text{etc.}\ D \tfrac{\pi^8}{2^9}$$

etc.

Hic enim coefficientes A, B, C etc. sequentem tenebunt progressionem:

$$A = 1$$
$$B = \frac{A}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}$$
$$C = \frac{B}{1.2} - \frac{A}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}$$
$$D = \frac{C}{1.2} - \frac{B}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.3.4.5.6} - \frac{1}{1.2 \ldots 7}$$

etc.

Quodsi ergo fingatur series haec: $s = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 +$ etc. erit

$$s = \frac{z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2 \ldots 7} + \text{etc.}}{1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3 \ldots 6} + \text{etc.}}$$

atque

atque hinc $s = \text{tang } A.\, z$, seu $z = \text{tang. } s$. Habebimus ergo $dz = \frac{ds}{1+ss}$ et $dz + ssdz = ds$ cui aequationi cum satisfacere debeat valor hic

$$s = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 + \text{etc.}$$

substituantur valores loco ds et ss, eritque

$$\begin{array}{ll} \frac{ds}{dz} = & A + 3Bz^2 + 5Cz^4 + 7Dz^6 + 9Ez^8 + \text{etc.} \\ \hline ss = & + A^2z^2 + 2ABz^4 + 2ACz^2 + 2ADz^8 + \text{etc.} \\ & \qquad\qquad\qquad + B^2z^6 + 2BCz^8 + \text{etc.} \\ 1 = & 1 \end{array}$$

Hinc itaque formatis aequationibus aliae sequentes prodibunt determinationes litterarum A, B, C, D, etc.

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \frac{A^2}{3} \\ C &= \frac{2AB}{5} \\ D &= \frac{2AC + B^2}{7} \\ E &= \frac{2AD + 2BC}{9} \\ F &= \frac{2AE + BD + C^2}{11} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

§. 22. Ab his seriebus potestatum parium pendent summae serierum sub hac forma generali contentarum

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

denotante n numerum parem. Quodsi enim fuerit

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.} = N\pi^n$$

erit $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.} = \frac{2^n N \pi^n}{2^n - 1}$

vnde omnium harum serierum dummodo sit n numerus

par,

par, ſummae per quadraturam circuli poterunt inueniri, atque ex iam inuentis ſummis ſimilium poteſtatum parium pro numeris imparibus ſolis. Verum vt hae ſummae directe inueniri queant, in legem peculiarem qua iſtae ſummae progrediuntur, inquiramus. Sit itaque

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = A\pi^2$$
$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = B\pi^4$$
$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc} = C\pi^6$$
$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = D\pi^8$$

etc.

ac contemplabor hanc ſeriem: $s =$
$A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + E\pi^{10} z^{10} + \text{etc.}$
quae ſubſtitutis loco $A\pi^2$, $B\pi^4$, $C\pi^6$, etc. ſeriebus quas denotant, additisque terminis homologis, prodibit
$s = \frac{zz}{1-zz} + \frac{zz}{4-zz} + \frac{zz}{9-zz} + \frac{zz}{16-zz} + \frac{zz}{25-zz} + \text{etc.}$
quae ſeries per §. 17. ſummata dat $s = \frac{1}{2} - \frac{\pi z}{2\,tang\,A \cdot \pi z}$ vel ſi tangens arcus πz per ſeriem exprimatur:

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2.3} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2 \ldots 7} + \text{etc.}}$$

$$s = \frac{\frac{\pi^2 z^2}{1.2.3} - \frac{2\pi^4 z^4}{1.2.3.4.5} + \frac{3\pi^6 z^6}{1 \ldots 7} - \frac{4\pi^8 z^8}{1.2 \ldots 9} + \text{etc.}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2.3} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2 \ldots 7} + \frac{\pi^8 z^8}{1.2 \ldots 9} - \text{etc.}}$$

qua expreſſione euoluta, cum ipſam ſeriem aſſumtam $A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.}$ praebere debeat, ſequentur hae coefficientium determinationes

$$A = \frac{1}{6}$$
$$B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{2}{1.2.3.4.5}$$
$$C = \frac{B}{1.2.3} - \frac{A}{1.2.3.4.5} + \frac{3}{1.2 \ldots 7}$$
$$D = \frac{C}{1.2.3} - \frac{B}{1.2.3.4.5} + \frac{A}{1.2 \ldots 7} - \frac{4}{1.2 \ldots 9}$$

etc.

§. 23.

§. 23. At pro iisdem his coefficientibus alia lex progressionis poteſt exhiberi, cuius ope eos multo expeditius reperire licebit. Cum enim ſit $s = \frac{1}{2} - \frac{\pi z}{2\, tang.\, A\pi z}$ erit $tang.\, A.\ \pi z = \frac{\pi z}{1-2s}$ et $\pi z = A\, tang.\, \frac{\pi z}{1-2s}$; ponatur $\pi z = u$, erit $u = A\, tang.\, \frac{u}{1-2s}$ et differentiando $du = \frac{du - 2sdu + 2uds}{1 - 4s + 4ss + uu}$ vel $uudu + 4ssdu = 2sdu + 2uds$: cui aequationi ſatisfacit valor hic $s = Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + Eu^{10} +$ etc. quo ſubſtituto fiet

$$
\begin{array}{rl}
uu = & uu \\
4ss = & 4A^2u^4 + 8ABu^6 + 8ACu^8 + 8ADu^{10} + 8AEu^{12} \\
 & \qquad + 4B^2u^8 + 8BCu^{10} + 8BDu^{12} \\
 & \qquad\qquad + 4C^2u^{12} \\
\hline
2s = & 2Au^2 + 2Bu^4 + 2Cu^6 + 2Du^8 + 2Eu^{10} + 2Fu^{12} \\
\frac{2uds}{du} = & 4Au^2 + 8Bu^4 + 12Cu^6 + 16Du^8 + 20Eu^{10} + 24Fu^{12}
\end{array}
$$

vnde ſequentes conſequuntur determinationes:

$$
\begin{array}{ll|ll}
A = \frac{1}{6} & & E = \frac{4AD + 4BC}{11} & \\
B = \frac{2A^2}{5} & & F = \frac{4AE + 4BD + 2C^2}{13} & \\
C = \frac{4AB}{7} & & G = \frac{4AF + 4BE + 4CD}{15} & \\
D = \frac{4AC + 2B^2}{9} & & H = \frac{4AG + 4BF + 4CE + 2D^2}{17} & \\
\end{array}
$$

etc.

§. 24. Ipſae autem huiusmodi ſerierum ſummae, quousque quidem eas ſupputaui, ſequentes ſunt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{2^5}{1 \cdot 2 \cdots 7} \cdot \frac{1}{6} \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{2^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9} \cdot \frac{3}{10} \pi^8$$

1 +

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{etc.}=\frac{2^9}{1.2\ldots11}\cdot\frac{5}{6}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\text{etc.}=\frac{2^{11}}{1.2\ldots13}\cdot\frac{691}{210}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\text{etc.}=\frac{2^{13}}{1.2\ldots15}\cdot\frac{35}{2}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\text{etc.}=\frac{2^{15}}{1.2\ldots17}\cdot\frac{3617}{30}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\text{etc.}=\frac{2^{17}}{1.2\ldots19}\cdot\frac{43867}{42}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\text{etc.}=\frac{2^{19}}{1.2\ldots21}\cdot\frac{1222277}{110}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\text{etc.}=\frac{2^{21}}{1.2\ldots23}\cdot\frac{854513}{6}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\text{etc.}=\frac{2^{23}}{1.2\ldots25}\cdot\frac{1181820455}{546}\pi^{24}$$

In his expreſſionibus fractionum mediarum tantum lex non eſt manifeſta, reliquae partes vero perſpicue progrediuntur. Cum autem iſtas fractiones medias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$ etc. attentius eſſem contemplatus, easdem deprehendi occurrere in expreſſione generali, quam olim tradidi pro ſumma cuiuscunque ſeriei ex dato termino generali inueniendа, ita vt alterius expreſſionis ope altera poſſit confici.

§. 25. Operae pretium igitur erit in conſenſum harum duarum expreſſionum inter ſe tantopere diuerſarum diligentius inquirere. Altera quidem expreſſio quam pro ſummatione ſerierum dedi, ita ſe habet: ſi ſeriei cuiuscunque terminus generalis, ſeu is qui reſpondet exponenti indefinito numerico x fuerit $=X$; et ſumma ſeriei a termino primo vsque ad hunc X incluſiue ponatur $=S$, erit $S=$

$$\int X dx+\frac{X}{1.2}+\frac{dX}{1.2.3.2dx}-\frac{d^3X}{1.2.3.4.5.6dx^3}$$
$$+\frac{d^5X}{1.2.3.4.5.6.7.6dx^5}-\frac{3d^7X}{1.2.3\ldots9.10dx^7}+\frac{5d^9X}{1.2\ldots11.6dx^9}$$
$$-\frac{691d^{11}X}{1.2\ldots13.210dx^{11}}+\frac{35d^{13}X}{1.2\ldots15.2dx^{13}}-\frac{3617d^{15}X}{1.2\ldots17.30dx^{15}}$$

+

$$+ \frac{43867 d^{17} X}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 42 dx^{17}} - \frac{1222277 d^{19} X}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 21 \cdot 110 dx^{19}}$$
$$+ \frac{854513 d^{21} X}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 23 \cdot 6 dx^{21}} - \frac{1181820455 d^{23} X}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 25 \cdot 546 dx^{23}} \text{ etc.}$$

in qua expreſſione apparet easdem omnino fractiones irregulares $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$, etc. ineſſe, quae ante in expreſſionibus ſummarum occurrerunt, hoc tantum diſcrimine, quod hic ſigna habeant alternantia, cum ibi omnia ſigno $+$ eſſent affectae. Atque hic ipſe conſenſus mihi hanc praeſtitit vtilitatem, vt iſtam generalem ſummae S expreſſionem eousque continuare potuerim, cum hoc per eam legem, quae tum temporis mihi pro iſtorum terminorum progreſſione inuenta erat, ſine multo maiore labore praeſtare non potuiſſem.

§. 26. Tametſi autem haec tanti conſenſus mera obſeruatio ſufficere poſſet, ad conſenſum in ſequentibus terminis, qui nondum conſtant, euincendum, tamen praeſtabit ex ipſa rei natura eandem conuenientiam eruere, vt ea non caſu, ſed neceſſario accidiſſe intelligatur. Hanc vero poſteriorem expreſſionem ſequenti modo ſum aſſecutus. Cum S denotet ſummam tot terminorum in ſerie quacunque, quot vnitates continentur in exponente x, vltimusque horum terminorum ſit $= X$: manifeſtum eſt, ſi in S ponatur $x - 1$ loco x, tum prodire debere ſummam eandem S vltimo termino minutam, ſeu $S - X$. At poſito $x - 1$ loco x quantitas S abibit in hanc:

$$S - \frac{dS}{1 \cdot dx} + \frac{ddS}{1 \cdot 2 dx^2} - \frac{d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.}$$

quae propterea aequalis eſt ipſi $S - X$; vnde habetur haec aequatio:

$$X = \frac{dS}{1 dx} - \frac{ddS}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} - \frac{d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \text{etc.}$$

Vt nunc ex hac aequatione S in X exprimatur, accipio hanc aequationem:

$$S = \int X dx + \alpha X + \frac{\beta dX}{dx} + \frac{\gamma ddX}{dx^2} + \frac{\delta d^3X}{dx^3} + \text{etc.}$$

cuius in illa facta substitutione habebitur

$$\begin{aligned} X = X + & \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} + \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} \\ & - \frac{dX}{1\cdot 2dx} - \frac{\alpha ddX}{1\cdot 2dx^2} - \frac{\beta d^3X}{1\cdot 2dx^3} - \frac{\gamma d^4X}{1\cdot 2dx^4} \\ & \qquad + \frac{ddX}{1\cdot 2\cdot 3dx^2} + \frac{\alpha d^3X}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{\beta d^4X}{1\cdot 2\cdot 3dx^4} \\ & \qquad\qquad - \frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} - \frac{\alpha d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} \\ & \qquad\qquad\qquad + \frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5dx^5} \end{aligned}$$

§. 27. Ex hac aequalitate nascuntur sequentes coefficientium α, β, γ, δ, etc. determinationes.

$$\alpha = \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{1\cdot 2} - \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{1\cdot 2} - \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{1\cdot 2\cdots 5}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{1\cdot 2} - \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{1}{1\cdot 2\cdots 6}$$

etc.

atque ex formulis tum temporis valores harum litterarum definiui, idque multo labore. Neque, quod hic euenit, aliter nisi sola obseruatione cognoui valores alternos γ, ε, η, etc. euanescere. At ex principiis nunc stabilitis idem luculenter ostendi poterit, si alia huius progressionis lex inuestigetur. Considero ad hoc istam seriem:

$$s = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

eritque ex praecedente coefficientium lege:

$s =$

$$s = \cfrac{1}{1 - \frac{z}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.}}$$

quae aequatio abit in hanc $s = \frac{z}{1 - e^{-z}}$ seu $s = \frac{e^z z}{e^z - 1}$. Hinc oritur $e^z s - s = e^z z$ et $e^z = \frac{s}{s-z}$ atque $z = ls - l(s-z)$. Differentiando autem habebitur $dz = \frac{ds}{s} - \frac{ds + dz}{s - z}$ siue

$$ssdz - szdz = sdz - zds$$

cui aequationi satisfacere debet valor assumtus

$$s = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

substituatur itaque hic valor in hac aequatione

$$\frac{zds}{dz} - s - sz + ss = 0$$

atque obtinebitur:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\frac{zds}{dz} & = & & +\alpha z & +2\beta z^2 & +3\gamma z^3 & +4\delta z^4 & +5\varepsilon z^5 \\
-s & = & -1 & -\alpha z & -\beta z^2 & -\gamma z^3 & -\delta z^4 & -\varepsilon z^5 \\
-sz & = & & -z & -\alpha z^2 & -\beta z^3 & -\gamma z^4 & -\delta z^5 \\
+s^2 & = & 1 & +2\alpha z & +2\beta z^2 & +2\gamma z^3 & +2\delta z^4 & +2\varepsilon z^5 \\
 & & & & +\alpha^2 & +2\alpha\beta & +2\alpha\gamma & +2\alpha\delta \\
 & & & & & & +\beta^2 & +2\beta\gamma
\end{array}$$

Hinc igitur colligitur fore:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tfrac{1}{2} \\
\beta &= \frac{\alpha - \alpha^2}{3} \\
\gamma &= \frac{\beta - 2\alpha\beta}{4} \\
\delta &= \frac{\gamma - 2\alpha\gamma - \beta\beta}{5} \\
\varepsilon &= \frac{\delta - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma}{6} \\
\zeta &= \frac{\varepsilon - 2\alpha\varepsilon - 2\beta\delta - \gamma\gamma}{7} \\
\eta &= \frac{\zeta - 2\alpha\zeta - 2\beta\varepsilon - 2\gamma\delta}{8}
\end{aligned}$$

§. 28.

§. 28. Cum igitur ſit $\alpha = \frac{1}{2}$ erit $1 - 2\alpha = 0$, qui valor cum in omnibus terminis ſequentibus occurrat, erit:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}$$
$$\beta = \tfrac{1}{12}$$
$$\gamma = 0$$
$$\delta = -\frac{\beta\beta}{5}$$
$$\varepsilon = -\frac{2\beta\gamma}{6}$$
$$\zeta = -\frac{2\beta\delta - \gamma\gamma}{7}$$
$$\eta = -\frac{2\beta\varepsilon - 2\gamma\delta}{8}$$
$$\theta = -\frac{2\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon - \delta\delta}{9}$$
$$\iota = -\frac{2\beta\eta - 2\gamma\zeta - 2\delta\varepsilon}{10}$$

etc.

cum nunc ſit $\gamma = 0$, perſpicuum eſt fore etiam $\varepsilon = 0$, hincque porro $\eta = 0$, $\iota = 0$, etc. ita vt omnes termini alterni incipiendo ab γ ſint $= 0$, id quod ex praecedente lege tantum per obſeruationes patebat, nunc vero id neceſſario euenire debere intelligitur. Hinc ergo manente $\alpha = \frac{1}{2}$ erit vt ſequitur

$$\beta = \tfrac{1}{12}$$
$$\delta = -\frac{\beta^2}{5}$$
$$\zeta = -\frac{2\beta\delta}{7}$$
$$\theta = -\frac{2\beta\zeta - \delta\delta}{9}$$
$$\varkappa = -\frac{2\beta\theta - 2\delta\zeta}{11}$$

Quod ſi ergo ponatur $\beta = \frac{A}{2}$; $\delta = -\frac{B}{2^3}$; $\zeta = \frac{C}{2^5}$; $\theta = -\frac{D}{2^7}$, $\varkappa = \frac{E}{2^9}$, etc. ita vt ſit $S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{A\,dX}{2dx} - \frac{B\,d^3X}{2^3dx^3} + \frac{C\,d^5X}{2^5dx^5} - \frac{D\,d^7X}{2^7dx^7} + \frac{E\,d^9X}{2^9dx^9} - \frac{F\,d^{11}X}{2^{11}dx^{11}} +$ etc. tenebunt coefficientes A, B, C, D, etc: hanc legem

A =

$$A = \frac{1}{6} \qquad E = \frac{4AD + 4BC}{11}$$
$$B = \frac{2A^2}{5} \qquad F = \frac{4AE + 4BD + 2C^2}{13}$$
$$C = \frac{4AB}{7} \qquad G = \frac{4AF + 4BE + 4CD}{15}$$
$$D = \frac{4AC + 2B^2}{7} \qquad \text{etc.}$$

Obtinent ergo litterae A, B, C, D, etc. eos ipſos valores, quos ipſis ſupra in §. §. 22 et 23 tribuimus. Atque hinc de conſenſu coefficientium in his expreſſionibus maxime diuerſis plene ſummus certi, neque eum caſui amplius adſcribere conueniet.

§. 29. Quanquam autem hoc modo ſatis expedite ſummam huius ſeriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} +$ etc. aſſignare valemus, ſi n eſt numerus par, tamen ex his iisdem principiis nihil omnino concludere poſſumus ad ſummas inueniendas, ſi n ſit numerus impar. Videri quidem poſſet, etiam has ſeries a quadratura circuli ita pendere, vt ſumma earum ſit $= N\pi^n$ caſibus ſcilicet quoque, quibus eſt n numerus impar: verum ſi has ſummas actu per approximationes ſumamus, videbimus coefficientem N non fieri numerum rationalem, niſi ſit n numerus par, id quod ex hac tabella clarius elucebit:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \text{etc.} = 1,644934066 = \frac{\pi^2}{6}$$
$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.} = 1,202056903 = \frac{\pi^3}{25,79436}$$
$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.} = 1,082323233 = \frac{\pi^4}{90}$$
$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \text{etc.} = 1,036927755 = \frac{\pi^5}{295,1215}$$
$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \text{etc.} = 1,017343062 = \frac{\pi^6}{945}$$
$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \text{etc.} = 1,008349329 = \frac{\pi^7}{2995,278}$$
$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \text{etc.} = 1,004077356 = \frac{\pi^8}{9450}$$

1 +

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \text{etc.} = 1,002008392 = \frac{\pi^9}{29749,35}$$
$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \text{etc.} = 1,000994575 = \frac{\pi^{10}}{93555}$$
$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \text{etc.} = 1,000494188 = \frac{\pi^{11}}{294058,7}$$
$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.} = 1,000246086 = \frac{\pi^{12}}{924041\frac{544}{691}}$$

Neque vero vlla relatio inter ſummas. poteſtatum imparium cernitur ſimilis ei, quam ſummae poteſtatum parium inter ſe tenent.

§. 30. Videtur autem aliquid circa ſummas poteſtatum imparium concludi poſſe, ſi ſigna ponantur alternantia. Cum enim imparium poteſtatum prima $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$ cognitam habeat ſummam ſcilicet $l\,2$: valde veriſimile videtur, etiam ſequentium poteſtatum imparium ſummas a logarithmo binarii pendere, ac fortaſſe inſuper a quadratura circuli. Sed antequam hic aliquid concludere queamus, inueſtigemus ſummas poteſtatum parium: ſitque

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = A\,\pi^2$$
$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = B\,\pi^4$$
$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = C\,\pi^6$$
$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \text{etc.} = D\,\pi^8$$
$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \text{etc.} = E\,\pi^{10}$$
etc.

vbi valores litterarum A, B, C, D etc. facile ex cognitis valoribus pro ſeriebus iisdem, dum omnes termini accipiuntur affirmatiui, concludi poſſint, ſed praeſtabit peculiarem legem pro his elicere. Conſidero itaque ſequentem ſeriem:

$s =$

$$s = A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.}$$

quae ſubſtitutis ipſis ſeriebus abibit in hanc:

$$s = \frac{zz}{1-zz} - \frac{zz}{4-zz} + \frac{zz}{9-zz} - \frac{zz}{16-zz} + \text{etc.}$$

quae ſeries per §. 17. ſummata dabit

$$s = \frac{\pi z}{2\sin.A.\pi z} - \frac{1}{2} \text{ ſiue ſinu expreſſo}$$

$$s = -\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{1.2.3} + \frac{\pi^4 z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{\pi^6 z^6}{1.2 \ldots 7} - \text{etc.}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Quodſi nunc ponatur terminus precedens in ſerie litterarum A, B, C, D, E, etc. ſeu ante primum A exiſtens $= \Delta$ erit

$$\Delta = \tfrac{1}{2}$$
$$A = \frac{\Delta}{1.2.3} = \frac{1}{12}$$
$$B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{\Delta}{1.2.3.4.5}$$
$$C = \frac{B}{1.2.3} - \frac{A}{1.3.3.4.5} + \frac{\Delta}{1.2 \ldots 7}$$
$$D = \frac{C}{1.2.3} - \frac{B}{1.2.3.4.5} + \frac{A}{1.2 \ldots 7} - \frac{\Delta}{1.2 \ldots 9}$$

At valor ipſius Δ non eſt mere aſſumtiuus, ſed reipſa ſummam ſeriei praecedentis exprimit, quae eſt

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \Delta\pi^0 = \tfrac{1}{2}$$

ſerierum vero reliquarum, quae hanc praecedunt, omnium ſummae ſunt $= 0$: ſcilicet

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.} = 0$$
$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc.} = 0$$
$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{etc.} = 0$$
etc.

§. 31. Ex his igitur ſequitur ſummam cuiusuis ſeriei ex praecedentibus omnibus recte concludi poſſe hoc modo, ſi fuerit

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \alpha\pi^n$$

$$1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}} - \frac{1}{4^{n-2}} + \text{etc.} = \beta\pi^{n-2}$$

$$1 - \frac{1}{2^{n-4}} + \frac{1}{3^{n-4}} - \frac{1}{4^{n-4}} + \text{etc.} = \gamma\pi^{n-4}$$

$$1 - \frac{1}{2^{n-6}} + \frac{1}{3^{n-6}} - \frac{1}{4^{n-6}} + \text{etc.} = \delta\pi^{n-6}$$

erit $\alpha = \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3} - \frac{\gamma}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{\delta}{1\cdot2\ldots7} - \frac{\epsilon}{1\cdot2\ldots9} + \frac{\zeta}{1\cdot2\ldots11} - \text{etc.}$
Vt igitur summam huius seriei inueniamus

$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5} + \text{etc.}$$

omnes, quae secundum hanc legem ipsam antecedunt considerari oportebit, quae sunt:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = A\pi^3$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = A\pi$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \text{etc.} = \frac{\alpha}{\pi}$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = \frac{\beta}{\pi^3}$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc.} = \frac{\gamma}{\pi^5}$$

eritque $B = \frac{A}{1\cdot2\cdot3} - \frac{\alpha}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{\beta}{1\cdot2\ldots7} - \frac{\gamma}{1\cdot2\ldots9} + \text{etc.}$
At harum serierum omnium summae exhiberi possunt, est enim

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = l\,2$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \text{etc.} = \frac{1}{4} = \frac{2\cdot1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = \frac{-1}{8} = \frac{-2\cdot1\cdot2\cdot3}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc.} = \frac{1}{4} = \frac{2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{\pi^6}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \text{etc.} = \frac{-17}{16} = \frac{-2\cdot1\cdot2\ldots7}{\pi^8}\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.}\right)$$

etc.

Atque

Atque hinc erit

$$A = \frac{l2}{\pi}$$
$$\alpha = \frac{2.1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}\right)$$
$$\beta = \frac{2.1.2.3}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}\right)$$
$$\gamma = \frac{2.1.2.3.4.5}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}\right)$$
$$\delta = \frac{2.1.2 \ldots 7}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.}\right)$$
$$\varepsilon = \frac{2.1.2 \ldots 9}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{etc.}\right)$$

etc.

§. 32. Summas autem potestatum parium fractionum, quarum denominatores sunt numeri impares supra exhibuimus. Sit

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = P\pi^2$$
$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = Q\pi^4$$
$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = R\pi^6$$
$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.} = S\pi^8$$

Erit per §. 21: $P\pi^2 + Q\pi^4 + R\pi^6 + S\pi^8 + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}\,\text{tang}\,A.\frac{\pi}{2}$

At litterae α, β, γ, δ, etc. sequentes obtinebunt valores.

$$\alpha = \frac{2.1}{\pi} P\pi^2$$
$$\beta = -\frac{2.1.2.3}{\pi} Q\pi^4$$
$$\gamma = \frac{2.1.2.3.4.5}{\pi} R\pi^6$$
$$\delta = -\frac{2.1.2.3.4.5.6.7}{\pi} S\pi^8$$

etc.

Ex lege ergo progressionis, si ponatur

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.} = A'\pi = l2$$
$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \text{etc.} = B\pi^3$$

 1 —

$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5} + \text{etc.} = C\,\pi^5$$

$$1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{6^7} + \text{etc.} = D\,\pi^7$$

etc.

Poterimus hos coefficientes A, B, C, D, etc. ita determinare, vt ſit:

$$A = \frac{l2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2.3} + \frac{Q\pi^4}{4.5} + \frac{R\pi^6}{6.7} + \frac{S\pi^8}{8.9} + \text{etc.}\right)$$

$$B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2.3.4.5} + \frac{Q\pi^4}{4.5.6.7} + \frac{R\pi^6}{6.7.8.9} + \text{etc.}\right)$$

$$C = \frac{B}{1.2.3} - \frac{A}{1.2.3.4.5} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2.3\ldots7} + \frac{Q\pi^4}{4.5\ldots9} + \frac{R\pi^6}{6.7\ldots11} + \text{etc.}\right.$$

$$D = \frac{C}{1.2.3} \; \frac{-B}{1.2.3.4.5} + \frac{A}{1.2\ldots7} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2.3\ldots9} + \frac{Q\pi^4}{4.5\ldots11} + \text{etc.}\right.$$

§. 33. Antequam autem quicquam hinc concludere ſuſcipiamus, exemplo vno doceamus regulam hanc inuentam recte ſe habere; ac valores veros litterarum inde prodire. Sumamus igitur primam formulam, et cum ſit $A = \frac{l2}{\pi}$ habebitur iſta aequatio

$$\frac{l2}{2} = \frac{P\pi^2}{2.3} + \frac{Q\pi^4}{4.5} + \frac{R\pi^6}{6.7} + \frac{S\pi^8}{8.9} + \text{etc.}$$

Eſt vero ad veros valores appropinquando

$$l2 = 0,69314718 0$$
$$P\pi^2 = 1,23370055 0$$
$$Q\pi^4 = 1,01467803 1$$
$$R\pi^6 = 1,00144707 7$$
$$S\pi^8 = 1,00015517 9$$
$$T\pi^{10} = 1,00001704 1$$
$$V\pi^{12} = 1,00000188 5$$
$$W\pi^{14} = 1,00000020 9$$
$$X\pi^{16} = 1,00000002 3$$
$$Y\pi^{18} = 1,00000000 2$$

Sumamus primum vnitates integras, pro $P\pi^2$, $Q\pi^4$ etc. habe-

habebimus $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} +$ etc. cuius feriei fumma conftat, quippe quae eft $= 1 - l\,2$ feu

0,306852810

nunc fumamus eorundem terminorum fractiones annexas, quae per refpectiuos denominatores diuifae dabunt:

0,038950091
0,000733901
34454
2155
155
12
1

0,039720771 addatur $1 - l\,2$
0,306852819

0,346573590 At vero eft $\frac{l2}{2} =$
0,346573590

vnde aequalitas luculenter perfpicitur.

§. 34. Cum igitur certo nunc conftet de veritate propofitionis §. 32. affertae, legem habemus, fecundum quam fummae ferierum $1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} +$ etc. denotante n numerum imparem quemcunque progrediuntur. Verum quia ex obferuatione tantum nobis conftat effe

$$\frac{l2}{2} = \frac{P\pi^2}{2\cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4\cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6\cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8\cdot 9} + \text{etc. fiue}$$

$$l2 = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{21}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{36}\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{55}\left(+ \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{9^{10}} + \text{etc.}\right. \\ \text{etc.} \end{cases}$$

 operae

operae pretium erit in demonstrationem huius veritatis inquirere. Ponimus igitur

$$s = \frac{P\pi^2}{2 \cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8 \cdot 9} + \text{etc.}$$

atque instituantur sequentes transformationes:

$$\frac{d \cdot \pi s}{d\pi} = \frac{P\pi^2}{2} + \frac{Q\pi^4}{4} + \frac{R\pi^6}{6} + \text{etc.}$$

$$\frac{dd \cdot \pi s}{d\pi^2} = P\pi + Q\pi^3 + R\pi^5 + \text{etc.}$$

Quia haec vltima series si per π multiplicetur, summam habet $\frac{\pi}{4}$ tang. A. $\frac{\pi}{2}$, quae expressio locum habet, etiamsi π quantitas sit variabilis, quemadmodum hic posuimus. Erit itaque

$$dd.\pi s = \frac{d\pi^2}{4} \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2} \text{ et hinc}$$

$$d.\pi s = \frac{d\pi}{4} \int d\pi \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2} \text{ ac denique}$$

$$s = \frac{1}{4\pi} \int d\pi \int d\pi \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2}$$

cuius aequationis radix iam patet, quippe est $s = -\frac{l2}{2}$.

§. 35. Consideremus primum formulam hanc $\int d\pi$ tang. A. $\frac{\pi}{2}$ quae abit in $\int \frac{d\pi \text{ sin A. } \frac{\pi}{2}}{\text{cos. A } \frac{\pi}{2}} = -2 l \text{cos. A } \frac{\pi}{2}$ hoc vero integrali substituto habebimus $s = \frac{-1}{\pi} \int \frac{d\pi}{2} l \text{ cos. A. } \frac{\pi}{2}$. Ad hanc formulam integrandam pono tang. A. $\frac{\pi}{2} = t$, erit cos. A $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ et $-l$ cos. A. $\frac{\pi}{2} = l\sqrt{(1+tt)} = \frac{1}{2} l(1+tt)$ et $\frac{d\pi}{2} = \frac{dt}{1+tt}$; ex quo erit $s = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt)$ atque ideo quaestio huc est reducta, vt definiatur integrale $\int \frac{dt\, l(1+tt)}{1+tt}$ tali adhibita constante vt integrale euanescat posito, $t = 0$; quo facto restitui oportet $t =$ tang. A. $\frac{\pi}{2}$ seu ob $\frac{\pi}{2} =$ arcui 90°, erit $t = \infty$. Formula autem haec, quia est $l(1+tt) = \frac{tt}{1+tt} + \frac{t^4}{2(1+tt)^2} + \frac{t^6}{3(1+tt)^3} + \frac{t^8}{4(1+tt)^4}$ + etc.

$+$ etc. transit in sequentem ita vt sit $\int \frac{dt}{1+tt}\, l(1+tt) =$ $\int \frac{ttdt}{(1+tt)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{t^4 dt}{(1+tt)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{t^6 dt}{(1+tt)^4} + \frac{1}{4}\int \frac{t^8 dt}{(1+tt)^5} +$ etc.
Per reductionem autem formularum integralium est generaliter.

$$\int \frac{t^{2m}\,dt}{(1+tt)^{m+1}} = \frac{-t^{2m-1}}{2m(1+tt)^m} + \frac{2m-1}{2m}\int \frac{t^{2m-2}\,dt}{(1+tt)^m}$$

Quare cum sit $\int \frac{dt}{1+tt} = \frac{\pi}{2}$ erit

$$\int \frac{ttdt}{(1+tt)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+tt}$$

$$\int \frac{t^4dt}{(1+tt)^3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2}$$

$$\int \frac{t^6dt}{(1+tt)^4} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} - \frac{t^5}{6(1+tt)^3}$$

$$\int \frac{t^8dt}{(1+tt)^5} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} - \frac{1\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3}$$
$$- \frac{1}{8}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4}$$

$$\int \frac{t^{10}dt}{(1+tt)^6} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2}$$
$$- \frac{1\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} - \frac{1\cdot 9}{8\cdot 10}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} - \frac{1}{10}\cdot\frac{t^9}{(1+tt)^5}\ \text{etc.}$$

Ex his substitutis orietur $\int \frac{dt}{1+tt}\, l(1+tt) =$

$$+ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{t}{1+tt}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{t^3}{4(1+tt)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6\cdot 3} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{t^5}{6(1+tt)^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{8\cdot 4} + \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{t^7}{8(1+tt)^4}\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{10\cdot 5} + \frac{9\cdot 11}{10\cdot 12\cdot 6} + \frac{9\cdot 11\cdot 13}{10\cdot 12\cdot 14\cdot 7} + \text{etc.}\right)$$
etc.

§. 36. Quaeramus primum summam seriei huius,

$$\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}$$

ponamusque:

$s =$

$$s = \frac{x}{2\cdot1} + \frac{1\cdot3\cdot x^2}{2\cdot4\cdot2} + \frac{1\cdot3\cdot5\, x^3}{2\cdot4\cdot6\cdot3} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot x^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot4} + \text{etc.}$$

erit $s = \int \frac{dz}{x\sqrt{(1-x)}}\; lx$, vt euoluenti facile patebit. At eſt $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-x)}} = c - l(1 + \sqrt{(1-x)}) + l(1 - \sqrt{(1-x)})$ hincque $s = c - l(1 + \sqrt{(1-x)}) + l(1 - \sqrt{(1-x)}) - lx$. vbi conſtans c ita debet eſſe comparata, vt poſito $x = 0$ fiat $s = 0$. Fiat igitur x infinite paruum, erit $\sqrt{(1-x)} = 1 - \frac{x}{2}$ et $l(1 - \sqrt{(1-x)}) = l\frac{x}{2} = lx - l2$ et $l(1 + \sqrt{(1-x)}) = l2$; vnde $c = 2\,l2$. Ponatur nunc $x = 1$, erit $s = 2\,l2$ atque

$$\frac{1}{2\cdot1} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot2} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot3} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot4} + \text{etc.} = 2\,l\,2$$

Ex hac autem ſerie reliquarum ſerierum ſummae ita determinabuntur vt ſit:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6\cdot3} + \frac{5\cdot7}{6\cdot8\cdot4} + \frac{5\cdot7\cdot9}{6\cdot8\cdot10\cdot5} + \text{etc.} = \frac{2\cdot4}{1\cdot3}\cdot 2\,l\,2 - \frac{2\cdot4}{1\cdot3\cdot2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{8\cdot4} + \frac{7\cdot9}{8\cdot10\cdot5} + \frac{7\cdot9\cdot11}{8\cdot10\cdot12\cdot6} + \text{etc.} = \frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}\, 2\,l\,2 - \frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5\cdot2} - \frac{6}{5\cdot2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{10\cdot5} + \frac{9\cdot11}{10\cdot12\cdot6} + \text{etc.} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\cdot 2\,l\,2 - \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot2} - \frac{6\cdot8}{5\cdot7\cdot2} - \frac{8}{7\cdot3}$$

etc.

Quibus ſummis ſubſtitutis proueniet $\int \frac{dt}{1+tt}\, l(1+tt)$

$$= + \frac{\pi}{2}\cdot 2\,l\,2$$
$$- \frac{t}{1+tt}\cdot 2\,l\,2$$
$$- \frac{t^3}{(1+tt)^2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\,l\,2 - \frac{1}{3\cdot1}\right)$$
$$- \frac{t^5}{(1+tt)^3}\left(\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\, 2\,l\,2 - \frac{4}{3\cdot5\cdot1} - \frac{1}{5\cdot2}\right)$$
$$- \frac{t^7}{(1+tt)^4}\left(\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\, 2\,l\,2 - \frac{4\cdot6}{3\cdot5\cdot7\cdot1} - \frac{6}{5\cdot7\cdot2} - \frac{1}{7\cdot3}\right)$$
$$- \frac{t^9}{(1+tt)^5}\left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\, 2\,l\,2 - \frac{4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot1} - \frac{6\cdot8}{5\cdot7\cdot9\cdot2} - \frac{8}{7\cdot9\cdot3} - \frac{1}{9\cdot4}\right)$$

etc.

§. 37.

§. 37. Quoniam vero ad inſtitutum noſtrum poſt integrationem abſolutam poni debet $t = \infty$, fiet $\int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt) = \pi l 2$ atque $s = \frac{1}{2}\pi \int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt) = \frac{l 2}{2}$, qui eſt ille ipſe valor quem praeuidimus prodire debere (§. 34). Reliqui enim termini in expreſſione, quam pro $\int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt)$ inuenimus, ſi ponatur $t = \infty$ omnes euaneſcunt, quia in denominatoribus ſingulorum terminorum t plures habet dimenſiones quam in numeratoribus, atque inſuper coefficientes numerici decreſcunt. Niſi enim hoc eueniret, tuto concludere non poſſemus ſummam omnium terminorum, quorum quisque euaneſcit eſſe $= 0$. Nam ſi verbi gratia priores tantum coefficientium numericorum partes accipiantur, vt prodiret haec ſeries:

$$\frac{t}{1+tt} + \frac{2t^3}{3(1+tt)^2} + \frac{2.4t^5}{3.5(1+tt)^3} + \frac{2.4.6.t^7}{3.5.7(1+tt)^4} \text{ etc.}$$

ſumma ipſius caſu quo $t = \infty$, fit finita et $= \frac{\pi}{2}$ etiamſi ſinguli termini euaneſcant, quodſi autem integri coefficientes capiantur ob ſeriem eorum valde conuergentium, tota quoque ſeries euadit $= 0$.

§. 38. Inquiramus nunc in ſummam huius ſeriei $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = B\pi^3$ quae ſumma per §. 32. erit $B\pi^3 = \frac{\pi^2 l 2}{1.2.3} - 2\pi^2 \left(\frac{P\pi^2}{2.3.4.5} + \frac{Q\pi^4}{4.5.6.7} + \frac{R\pi^6}{6.7.8.9} + \text{etc.}\right)$ Ad valorem huius quantitatis inueniendum ſit $s =$

$$\frac{P\pi^2}{2.3.4.5} + \frac{Q\pi^4}{4.5.6.7} + \frac{R\pi^6}{6.7.8.9} + \text{etc.}$$

erit $\frac{d.\pi^3 s}{d\pi} = \frac{P\pi^4}{2.3.4} + \frac{Q\pi^6}{4.5.6} + \frac{R\pi^8}{6.7.8} + \text{etc.}$

$$\frac{dd.\pi^3 s}{d\pi^2} = \frac{P\pi^3}{2.3} + \frac{Q\pi^4}{4.5} + \frac{R\pi^7}{6.7} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3.\pi^3 s}{d\pi^3} = \frac{P\pi^2}{2} + \frac{Q\pi^4}{4} + \frac{R\pi^6}{6} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^4.\pi^3 s}{d\pi^4} = P\pi + Q\pi^3 + R\pi^5 + \text{etc.} = \frac{1}{4}\text{ tang. A }\frac{\pi}{2}.$$

Regrediendo erit ergo.

$\frac{d^3\, \pi^3 s}{d\pi^3} = \frac{1}{4}\int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$.

$\frac{dd.\, \pi^3 s}{d\pi^2} = \frac{1}{4}\int d\pi \int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$.

$\frac{d.\, \pi^3 s}{d\pi} = \frac{1}{4}\int d\pi \int d\pi \int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$.

$\pi^3 s = \frac{1}{4}\int d\pi \int d\pi \int d\pi \int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$.

Atque hinc habebitur fumma feriei propofitae $B\pi^3 = \frac{\pi^2 l 2}{6} - \frac{1}{2\pi}\int d\pi \int d\pi \int d\pi \int d\pi$ tang. A $\frac{\pi}{2}$, quae omnia integralia ita debent accipi, vt euanefcant pofito $\pi = 0$.

§. 39. Ponatur $\frac{\pi}{2} = q$, ita vt integrationibus abfolutis q denotet quartam peripheriae partem circuli, cuius radius $= 1$ feu arcum 90 graduum. Sitque porro fin. A $q = y$ et cof. A $q = x = \surd(1-yy)$, erit tang. A. $\frac{\pi}{2} = \frac{y}{x}$. Quare ob $\pi = 2q$, erit fumma noftrae feriei $B\pi^3 = \frac{2qql2}{3} - \frac{4}{q}\int dq \int dq \int dq \int \frac{ydq}{x}$. Ponamus tantisper $\int dq \int dq \int dq \int \frac{ydq}{x} = u$ erit $B\pi^3 = \frac{2qql2}{3} - \frac{4u}{q}$, vbi in quantitate u inuenienda omnes integrationes ita debent accipi, vt integralia fingula euanefcant pofito $q = 0$ et $y = 0$, integralibus vero abfolutis erit $y = 1$ et $x = 0$. Eft vero $\int \frac{ydq}{x} = \int \frac{ydy}{1-yy} = -l\surd(1-yy) = l\frac{1}{x}$.
et $l\frac{1}{x} = \frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \frac{y^{10}}{10} +$ etc.
Cum nunc fit $u = \int dq \int dq \int dq\; l\frac{1}{x}$, erit per reductionem integralium

$$u = q\int dq \int dq\; l\frac{1}{x} - \int qdq \int dq\; l\frac{1}{x}$$

atque porro

$$\int dq \int dq\; l\frac{1}{x} = q\int dq\; l\frac{1}{x} - \int qdq\; l\frac{1}{x}$$

$$\int qdq \int dq\; l\frac{1}{x} = \frac{qq}{2}\int dq\; l\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int qqdq\; l\frac{1}{x}$$

ergo

$$u = \frac{1}{2}qq\int dq\; l\frac{1}{x} - q\int qdq\; l\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int qqdq\; l\frac{1}{x}$$

ita

ita vt nunc tres formulas habeamus simpliciter differentiales, quas integrare debemus.

§. 40. Consideremus singulas has tres formulas seorsim, ac primo quidem hanc $\int dq\, l\frac{1}{x}$, quam etsi iam supra integrauimus, tamen eandem ex consideratione sinuum et cosinuum denuo integremus, vt via facilior paretur ad reliquas integrandas. Est igitur:

$$\int dq\, l\tfrac{1}{x} = \int dq\, (\tfrac{yy}{2} + \tfrac{y^4}{4} + \tfrac{y^6}{6} + \tfrac{y^8}{8} + \tfrac{y^{10}}{10} + \text{etc.})$$

Ad hoc integrale inueniendum consideretur membrum eius quodcunque $\int y^{n+2} dq$, et cum sit $dq = \frac{dy}{x} = \frac{-dx}{y}$ et $xx + yy = 1$, erit

$$\int y^{n+2} dq = -\int y^{n+1} dx = -y^{n+1} x + (n+1) \int y^n x dy$$

at est $\int y^n x dy = \int y^n x^2 dq = \int y^n dq - \int y^{n+2} dq$

ob $xx = 1 - yy$: ex quo erit:

$$\int y^{n+2} dq = -y^{n+1} x + (n+1) \int y^n dq - (n+1) \int y^{n+2} dq$$

atque

$$\int y^{n+2} d q = \frac{-y^{n+1} x}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} \int y^n dq$$

Hinc itaque integrale cuiusque membri reducitur ad integrale praecedentis, et quoniam integratione absoluta fit $x = 0$; erit pro hoc casu

$$\int y^{n+2} dq = \frac{n+1}{n+2} \int y^n dq.$$

Ex hac ergo formula reperientur singulae integralis partes vt sequitur.

$$\int y^2 dq = \tfrac{1}{2} q$$
$$\int y^4 dq = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} q$$
$$\int y^6 dq = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} q$$
$$\int y^8 dq = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} q$$

Hancobrem habebitur: $\int dq\; l\frac{1}{x} = \frac{1}{2}q\left(\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot4}+\text{etc.}\right)$ cuius feriei cum iam fupra inuenta fit fumma (§. 36.) $=2\,l\,2$ erit $\int dq\; l\frac{1}{x}=q\,l\,2$.

§. 41. Progrediamur iam ad fecundam formulam integralem $\int q\,dq\; l\frac{1}{x}$, quae abit in

$$\int q\,dq\; l\frac{1}{x}=\int q\,dq\left(\frac{yy}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}+\frac{y^8}{8}+\text{etc.}\right)$$

cuius partem confideremus quamcunque $\int y^{n+2}q\,dq = -\int y^{n+1}q\,dx = -y^{n+1}qx+\int y^{n+1}x\,dq+(n+1)\int y^n qx\,dy$ $=-y^{n+1}qx+\frac{y^{n+2}}{n+2}+(n+1)\int y^n q\,dq-(n+1)\int y^{n+2}q\,dq$

Pofito itaque $y=1$ et $x=0$, erit

$$\int y^{n+2}q\,dq=\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{n+1}{n+2}\int y^n q\,dq$$

Integralia igitur fingulorum membrorum ita fe habebunt:

$$\int y^2 q\,dq = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{2}$$
$$\int y^4 q\,dq = \frac{1}{4^2}+\frac{3}{4\cdot2^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{q^2}{2}$$
$$\int y^6 q\,dq = \frac{1}{6^2}+\frac{5}{6\cdot4^2}+\frac{3\cdot5}{4\cdot6\cdot2^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{q^2}{2}$$
$$\int y^8 q\,dq = \frac{1}{8^2}+\frac{7}{8\cdot6^2}+\frac{5\cdot7}{6\cdot8\cdot4^2}+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8\cdot2^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{q^2}{2}$$

etc.

Ex quo obtinebitur integrale $\int q\,dq\; l\frac{1}{x}=$

$$+\frac{qq}{4}\left(\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot4}\text{ etc.}\right.$$
$$+\frac{1}{2\cdot2^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{3}{4\cdot2}+\frac{3\cdot5}{4\cdot6\cdot3}+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8\cdot4}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2\cdot4^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6\cdot3}+\frac{5\cdot7}{6\cdot8\cdot4}+\frac{5\cdot7\cdot9}{6\cdot8\cdot10\cdot5}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2\cdot6^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{8\cdot4}+\frac{7\cdot9}{8\cdot10\cdot5}+\frac{7\cdot9\cdot11}{8\cdot10\cdot12\cdot6}+\text{etc.}\right)$$

etc.

Vel etiam hac forma $\int q\,dq\; l\frac{1}{x}=$

$$\frac{qq}{4}\left(\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot4}+\text{etc.}\right.$$

+

$$+\frac{1}{2^2\cdot 2}+\frac{1}{4^2\cdot 4}+\frac{1}{6^2\cdot 6}+\frac{1}{8^2\cdot 8}+\text{etc.}$$
$$+\frac{3}{2^2\cdot 4^2}+\frac{5}{4^2\cdot 6^2}+\frac{7}{6^2\cdot 8^2}+\frac{9}{8^2\cdot 10^2}+\text{etc.}$$
$$+\frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 4\cdot 6^2}+\frac{5\cdot 7}{4^2\cdot 6\cdot 8^2}+\frac{7\cdot 9}{6^2\cdot 8\cdot 10^2}+\frac{9\cdot 11}{8^2\cdot 10\cdot 12^2}+\text{etc.}$$
$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^2\cdot 4\cdot 6\cdot 8^2}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{4^2\cdot 6\cdot 8\cdot 10^2}+\frac{7\cdot 9\cdot 11}{6^2\cdot 8\cdot 10\cdot 12^2}+\text{etc.}$$

hae autem ſeries id ipſum, quod eſt in quaeſtione inuoluunt, nempe ſummationem cuborum terminorum ſeriei harmonicae.

§. 42. Quod ſi ſequamur priorem formam, omnes ſeries ſummabiles §. 36, habebiturque

$$\begin{aligned}\int q dq\, l\tfrac{1}{x} = {} & \tfrac{aa}{2}\, l2 \\ & + \tfrac{1}{2^2}\left(\tfrac{2}{1}\, l2\right) \\ & + \tfrac{1}{4^2}\left(\tfrac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\, l2 - \tfrac{4}{3\cdot 2}\right. \\ & + \tfrac{1}{6^2}\left(\tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\, l2 - \tfrac{4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 2} - \tfrac{6}{5\cdot 4}\right) \\ & + \tfrac{1}{8^2}\left(\tfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\, l2 - \tfrac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 2} - \tfrac{6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 4} - \tfrac{8}{7\cdot 6}\right) \text{ etc.}\end{aligned}$$

quae ſi denuo ſeries deorſum capiantur, dant.

$$\begin{aligned}\int q dq\, l\tfrac{1}{x} = {} & \tfrac{aa}{2}\, l2 \\ & + l2\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3\cdot 4}+\tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6}+\tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8}+\text{etc.}\right. \\ & - \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{4}{5\cdot 6}+\tfrac{4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 8}+\tfrac{4\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 10}+\text{etc.}\right. \\ & - \tfrac{1}{4\cdot 5}\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{6}{7\cdot 8}+\tfrac{6\cdot 8}{7\cdot 9\cdot 10}+\tfrac{6\cdot 8\cdot 10}{7\cdot 9\cdot 11\cdot 12}+\text{etc.}\right. \\ & - \tfrac{1}{6\cdot 7}\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{8}{9\cdot 10}+\tfrac{8\cdot 10}{9\cdot 11\cdot 12}+\tfrac{8\cdot 10\cdot 12}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 14}+\text{etc.}\right. \\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

At eſt $\frac{1}{2}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8}+\text{etc.}=\frac{qq}{2}$

vnde erit

$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{4}{5\cdot 6}+\tfrac{4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 8}+\text{etc.}=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{qq}{2}-\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{6}+\tfrac{6}{7\cdot 8}+\tfrac{6\cdot 8}{7\cdot 9\cdot 10}+\text{etc.}=\tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{qq}{2}-\tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{1}{4}$$
$$\tfrac{1}{8}+\tfrac{8}{9\cdot 10}+\tfrac{8\cdot 10}{9\cdot 11\cdot 12}+\text{etc.}=\tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{qq}{2}-\tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{5\cdot 7}{4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{4}-\tfrac{7}{6}\cdot\tfrac{1}{6}$$

etc.

 Quam-

Quamobrem habebitur $\int q\,d\,q\,l\,\frac{1}{x} = qq\,l\,2$

$$- \frac{qq}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2\cdot 4^2} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^2} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8^2} + \text{etc.}\right.$$

$$+ \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+ \frac{3}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$+ \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{4\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{6}$$

$$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{6\cdot 8^2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{8^2}\cdot\frac{1}{8}$$

etc.

§. 43. At fortaſſe difficultas commodam expreſſionem inueniendi diminuetur, ſi tres illas formulas integrales colligamus. Hancobrem ſumamus tertiam formulam $\int qq\,d\,q\,l\,\frac{1}{x}$ quae abit in $\int qq\,dy\left(\frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \text{etc.}\right)$ Conſideretur formula $\int y^{n+2}\,qq\,d\,q$ quae abit in $-\int y^{n+1}\,qq\,d\,x = -y^{n+1}\,qq\,x + 2\int y^{n+1}\,q\,x\,d\,q + (n+1)\int y^n\,qq\,x\,dy = -y^{n+1}\,qq\,x + 2\int y^{n+1}\,q\,d\,y + (n+1)\int y^n\,qq\,d\,q - (n+1\int y^{n+2}\,qq\,d\,q$: hinc ergo erit

$$\int y^{n+2}\,qq\,d\,q = \frac{-y^{n+1}\,qq\,x}{n+2} + \frac{2}{n+2}\int y^{n+1}\,q\,dy + \frac{n+1}{n+2}\int y^n\,q\,q\,d\,q$$

At eſt $\int y^{n+1}\,q\,dy = \frac{y^{n+2}\,q}{n+2} - \frac{1}{n+2}\int y^{n+2}\,d\,q = \frac{q}{n+2} - \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\ldots(n+\ )}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\ldots(n+2)}\,q$ poſito $y = 1$ (§. 0). Conſequenter erit $\int y^{n+2}\,qq\,d\,q = \frac{2q}{(n+2)^2}\left(1 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\ldots(n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\ldots(n+2)}\right) + \frac{n+1}{n+2}\int y^n\,q\,q\,d\,q$. ac integralis quaeſiti ſingula membra erunt:

$$\int y^2\,q\,q\,d\,q = \frac{1}{2^2}\cdot 2\,q - \frac{1}{2^2\cdot 2}\,2\,q + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^3}{3}$$

$$\int y^4\,q^2\,d\,q = \frac{1}{4^2}\,2\,q - \frac{1}{4^2}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 2q + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\,q - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,2q + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{q^3}{3}$$

$$\int y^6\,q^2\,d\,q = \frac{2q}{6^2}\left(1 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right) + \frac{5}{6}\cdot\frac{2q}{4^2}\left(1 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{2q}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{q^3}{3}$$

His valoribus ſubſtitutis et terminis in ordinem redactis redactis reperietur tandem

$\int qq$

$$\int qq\,dq\,l\tfrac{1}{x} = \tfrac{q^3}{6}\left(\tfrac{1}{2\cdot 1} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2^2}q\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\left(1 + \tfrac{3}{4\cdot 2} + \tfrac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 3} + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4^2}q\left(1 - \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{6\cdot 3} + \tfrac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \tfrac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{6^2}q\left(1 - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{7}{8\cdot 4} + \tfrac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \tfrac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
etc.

Cum autem fit $u = \tfrac{1}{2}qq\int dq\,l\tfrac{1}{x} - q\int q\,dq\,l\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{2}\int qq\,dq\,l\tfrac{1}{x}$ erit his integralibus, vt funt inuenta additis

$$u = \tfrac{q^3}{12}\left(\tfrac{1}{2.1} + \tfrac{1\cdot 3}{2.4.2} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.3} + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 2^2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{3}{4.2} + \tfrac{3\cdot 5}{4.6.3} + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{4.6.8.4} + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 4^2}\,\tfrac{1\cdot 3}{2.4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{6.3} + \tfrac{5\cdot 7}{6.8.4} + \tfrac{3\cdot 7\cdot 9}{6.8.10.4} + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 6^2}\cdot\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{7}{8.4} + \tfrac{7\cdot 9}{8.10.5} + \text{etc.}\right)$$
etc.

His autem feriebus integratis vt fupra, erit

$$u = \tfrac{q^3}{6}\,l\,2$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 2^2}\,.\,2\,l\,2$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 4^2}\,.\,\left(2\,l\,2 - \tfrac{1}{2.1}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 6^2}\left(2\,l\,2 - \tfrac{1}{2.1} - \tfrac{1\cdot 3}{2.4.2}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 8^2}\left(2\,l\,2 - \tfrac{1}{2.1} - \tfrac{1\cdot 3}{2.4.2} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.3}\right)$$
$$- \tfrac{q}{2\cdot 10^2}\left(2\,l\,2 - \tfrac{1}{2.1} - \tfrac{1\cdot 3}{2.4.2} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.3} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2.4.6.8.4}\right)$$

Eft vero $\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{6^2} + \text{etc.} = \tfrac{qq}{6}$ vnde

$$u = \tfrac{q}{2.2}\left(+\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{8^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1\cdot 3\,q}{2.4.4}\left(\tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{8^2} + \tfrac{1}{10^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot q}{2.4.6.6}\left(\tfrac{1}{8^2} + \tfrac{1}{10^2} + \tfrac{1}{12^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot q}{2.4.6.8.8}\left(\tfrac{1}{10^2} + \tfrac{1}{12^2} + \tfrac{1}{14^2} + \text{etc.}\right.$$
etc.

Hinc

Hinc igitur erit:

$$u = \frac{q}{2.2}\left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2}\right)$$
$$+ \frac{1\cdot 3\, q}{2.\,4.\,4}\left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\, q}{2.\,4.\,6.\,6}\left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2}\right)$$

vel ſerie prima verticali actu ſummata

$$u = \frac{q^3}{6}\, l2$$
$$- \frac{q}{2.\,2}\left(\frac{1}{2^2}\right)$$
$$- \frac{1\cdot 3\, q}{2.\,4.\,4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\right)$$
$$- \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot q}{2.\,4.\,6.\,6}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2}\right)$$
etc.

§. 44 Cum nunc ſeriei noſtrae propoſitae $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} -$ etc. ſumma ſit $= B\pi^3 = \frac{2qq\,l2}{3} - \frac{4u}{q}$ fiet eadem ſumma $=$

$$+ \frac{1}{2.2}\cdot 1$$
$$+ \frac{1\cdot 3}{2.\,4.\,4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.\,4.\,6.\,6}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2.\,4.\,6.\,8.\,8}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right)$$
etc.

Vel cum ſit $\frac{1}{2.2} + \frac{1\cdot 3}{2.\,4.\,4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.\,4.\,6.\,6}$ etc. $= l2$ erit ſeriei propoſitae ſumma $B\pi^3 = l2 + \frac{1}{2^2}\left(l2 - \frac{1}{2.2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(l2 - \frac{1}{2.2} - \frac{1\cdot 3}{2.\,4.\,4}\right) + \frac{1}{4^2}\left(l2 - \frac{1}{2.2} - \frac{1\cdot 5}{2.\,4.\,4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.\,4.\,6\,6}\right) +$ etc. ſiue haec eadem ſumma ita poterit exprimi vt ſit

$$B\pi^3 = \frac{\pi^2}{6}\, l2 - \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2.2}\right)$$
$$- \frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{2.2} + \frac{1\cdot 3}{2.\,4.\,4}\right)$$
$$- \frac{1}{4^2}\left(\frac{1}{2.2} + \frac{1\cdot 3}{2.\,4.\,4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\,4.\,6.\,6}\right)$$
$$- \frac{1}{5^2}\left(\frac{1}{2.2} + \frac{1\cdot 3}{2.\,4.\,4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.\,4.\,6.\,6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2.\,4.\,6.\,8.\,8}\right)\text{etc.}$$

Quoniam autem vtcunque has ſeries transmutemus, eas ad ſeriem ſimplicem, cuius ſumma conſtet, reducere non poſſumus, negotium hoc abrumpamus, pluribus his expreſſionibus contenti, quas ſeriei propoſitae $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} -$ etc. aequales eſſe inuenimus.

COM-

COMMENTATIONES DE OSCILLATIONIBVS COMPOSITIS PRAESERTIM IIS QVAE FIVNT IN CORPORIBVS EX FILO FLEXILI SVSPENSIS.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§. 1.

De oſcillationibus ſermonem facturo ante omnia mihi monendum erit, ſolas eas conſiderari hic pro more ſolito, quae ita paruae ſunt, vt in calculo pro infinite paruis haberi poſſint. Poſſunt autem in ſyſtemate, cuius ſingulae partes motibus reciprocis agitantur, duo potiſſimum oſcillationum genera conſiderari: primum eſt cum ſingulae ſyſtematis partes neceſſario itus reditusque ſuos ſimul incipiunt, ſimulque finiunt: tales oſcillationes faciunt corpora ex filo rigido firmata et ſuſpenſa iam pridem a Geometris exploratas: alterum genus eſt, cum diuerſae ſyſtematis partes diuerſis temporibus oſcillationes ſuas perficere poſſunt, quamuis nexus partium talis ſit, vt ſingularum oſcillationum indoles a mutatione vniuscuiusuis mutentur. Has poſtremas oſcillationes voco *compoſitas*. Huiuscemodi oſcillationum exemplum haud inelegans dedi deſumtum a corporibus filo flexili connexis et ſuſpenſis vid. Comm. tom VI. pag. 108. et nuperrime expoſui aliud, quo duplices in corporibus humido inſidentibus oſcillationum ſpecies ſimul exiſtentes, quaeque non poſſint aliter, quam ſimul determinari, examinaui et definiui. Tab. II.

§. 2. Oſcillationes noſtrae compoſitae quam maxime differunt a ſimplicibus, praeſertim autem, eo quod ſint valde inaequales, dum quaeuis ſyſtematis particula modo minorem modo maiorem excurſionem facit, easque modo citius modo tardius percurrit. At vero poteſt, quod imprimis hic notandum, excurſionum magnitudinibus talis aſſignari proportio conſtans, vt ea ſemel poſita perpetuo conſeruetur, fiantque oſcillationes non ſolum vniformes, ſed et ſingulae tam maiores quam minores inter ſe iſochronae atque toutochronae: ſtatuo autem, tam ratione quam pluribus experimentis inductus, oſcillationes compoſitas ad hunc vniformitatis ſtatum ſemper magis magisque tendere ſeque tandem ſua ſponte componere, aliae citius quidem aliae lentius, quaedam autem citiſſime: ita v. gr. chorda muſica non poteſt non ab initio vibrationes facere inaequales, quae tamen dicto citius fiunt tantum non regulares, dum chorda vibrata mox ſe componit ad curuaturam tautochroniſmo eſſentialem.

§. 3. Nec vno tantum modo oſcillationes fiunt vniformes, ſed aliquando pro re nata duobus modis, aliquando pluribus, aliquando etiam infinitis, quod egregie illuſtratur eodem, quod ſupra citaui exemplo corporum filo flexili connexorum et ſuſpenſorum. Si enim duo ſunt corpora, duobus diuerſis modis fiunt oſcillationes vniformes, idemque tribus obtinetur modis, cum corpora ſunt tria, et ſic porro; atque ſi tandem corpora ſumas numero infinita catenam quaſi perfecte flexilem efformantia, infinitis ſimul modis obtinetur in catena oſcillante iſochroniſmus: pro quouis autem modo durationes oſcillationum aliae ſunt: ſtatus interim vniformitatis, quem partes ſyſtematis oſcillantes

lantes maxime affectant, ille eſt, quo oſcillationes inter omnes poſſibiles fiunt lentiſſimae.

§. 4. Similiter multis imo et infinitis modis chorda muſica tenſa motus ſuos tremulos efformat iſochronos in theoria, quamuis illi difficulter obtineantur, ſingulis autem modis alius editur ſonus magis minusue acutus. Modus primus et maxime naturalis eſt, quum chorda inter oſcillandum efformat arcum vnicum, tuncque facit oſcillationes lentiſſimas, ſonumque edit inter omnes poſſibiles maxime grauem reliquis omnibus fundamentalem. Modus alter poſtulat vt chorda inter oſcillandum duos arcus ad partes diverſas poſitos efformet, tuncque fiunt oſcillationes duplo frequentiores, iamque editur ſoni fundamentalis *octaua*: tum ſi chorda inter oſcillandam incuruatur in tres, quatuor, quinque etc. arcus alterna ſerie poſitos, fiunt oſcillationes vniuscuiusuis arcus triplo, quadruplo, quintuplo etc. frequentiores, ſonique eduntur ratione ſoni fundamentalis *octauae quinta*, *octaua duplex*, *octauae duplicis tertia maior* proxime et ſic porro. Inſeruiunt hae obſeruationes ad multa phaenomena acuſtica circa chordas muſicas explicanda; cur v. gr. ſoni tam ſonori ſint in tuba marina? cur in hoc inſtrumento vnichordo ii tantum modo ſoni grati, pleni et perfecti ſint, cum pars chordae, quae arcu pulſatur, praeciſe ſubmultipla eſt chordae totius? et quae ſunt tam in hoc inſtrumento muſico, quam in aliis phaenomena reliqua, quae ſingula a Merſenno in libris Harmonicorum recenſentur quidem, at minime recte explicantur. Haec autem obiter monuiſſe ſufficiat: pergo nunc ad problema mechanicum, quo argumentum de oſcillationibus compoſitis vlterius explicabitur.

§. 5. Confiderabimus itaque corpora finitae extenfionis ex puncto fixo mediante filo flexili datae longitudinis fufpenfa. Haec corpora cum hinc inde agitantur, motum duplicem angularem obtinere confiderari poffunt; alterum quo angulus filum inter et lineam verticalem per punctum fixum transeuntem continue mutatur, alterum quo angulus inter idem filum et lineam, quae per punctum, vbi filum corpori alligatur et per centrum grauitatis corporis tranfit, perpetuo variat. Hi motus angulares irregulares, inaequales, perturbati, tam ratione durationis quam magnitudinis ftatim funt: at fieri poteft vt fimul incipiant fimulque finiantur, tuncque ofcillationes ad ftatum vniformitatis reductae funt, ad quem fua fponte magis magisque accedunt. Atque ifte eft ftatus, quem folum confiderabimus, et cuius indolem explorare conftituimus.

§. 6. Sit igitur primo (nec enim argumentum ftatim generaliffime inquirere iuuat) linea recta C H (fig. 5.) Tab. II. craffitiei et grauitatis vtcunque inaequalis, fufpenfa ex filo A C perfecte flexili omnique deftituto grauitate, Patet autem requirere legem vniformitatis ofcillationum, vt fingula puncta lineae grauis ofcillantis fimul perueniant in fitum verticalem C H fimulque in fitum extremum D G, in quo tota linea ad temporis punctum veluti quiefcit. Si vero putemus lineam D G a ftatu quietis verfus lineam verticalem motu accelerato progredi, tunc facile intelligimus, fi fingula virgae puncta vim acceleratricem patiantur diftantiis eorundem à linea verticali conftanter proportionalem, fore tunc vt fingula etiam puncta fimul in fitum lineae verticalis perueniant. Igitur fitus virgae vbique talis effe debet, vt vis acceleratrix pro quouis virgae puncta cto hanc praefatam habeat legem. Ceterum habetur, vt notum est, vis acceleratrix, si vis punctum horizontaliter versus lineam verticalem vrgens diuidatur per massam puncti. His praemonitis iam inquirenda nobis venit vis acceleratrix pro singulis virgae punctis.

§. 7. Sit igitur virga in situ extremo D G posita, haecque dein producatur vsque in B, vbi lineam verticalem secat: tum centro B ducantur arculi D C, E F, O Q et G H, qui pro lineolis infinite paruis horizontalibus haberi possunt, quia hic tantum de oscillationibus minimis sermo est. Denotat autem punctum D locum, ex quo filum virgae alligatum est, siue is sit in extremitate virgae, siue alicubi in medio. In puncto E ponimus centrum grauitatis virgae; per O intelligimus punctum quodcumque in virga sumtum, et per G punctum virgae infimum.

Producatur nunc A D vsque in M, ponaturque $AC = n$; $CH = m$; $CF = g$; incognita $BC = \alpha$; $EF = q$; erit $DC = \frac{\alpha q}{\alpha + g}$; vis grauitatis designetur per vnitatem, sitque variabilis B Q vel $BO = x$; massa $DO = \xi$ data per x et constantes; massa totius virgae $= M$: Ducatur minima oq alteri O Q parallela et infinite propinqua: sic erit massa elementi $Oo = d\xi$. Quoniam autem vis acceleratrix elementi Oo seu potentia elementum Oo horizontaliter versus lineam verticalem vrgens diuisa per massulam $d\xi$ est proportionalis (per §. 6.) lineae O Q seu etiam lineae B Q, faciemus vim istam acceleratricem $= \frac{x}{a}$ intelligendo per a aliquam constantem: sic igitur quoduis punctum O vim acceleratricem patitur indicatam per $\frac{x}{a}$ et massula elementi Oo vim horizontalem exercet indicandam per $\frac{xd\xi}{a}$: vnde si cuiuis elemento O o potentia contraria intelligatur applicata, quae sit $= \frac{xd\xi}{a}$, totum systema in aequilibrio, ad quod in situ extremo ad momentum temporis reductum fuisse censeri potest (§. 6.) perpetuo seruabitur.

§. 8. Si iam ducatur horizontalis O R, quae exprimat praefatam potentiam horizontalem $\frac{xd\xi}{a}$ elementum O o ab O versus R trahentem, oportet vt omnes istae potentiae systema in aequilibrio seruent: exinde per regulas staticae concludere licet, *primo* summam omnium potentiarum virgam in situ D G detinentium eamque, ne ad verticalum accedat impedientium esse aequalem summae omnium potentiarum horizontalium contrariarum, quae nempe à grauitate virgae oriuntur. *Secundo* si consideretur virga D G tanquam vectis mobilis circa punctum D, vectem hunc etiamnum in statu quietis et aequilibrii permansurum. Hisce igitur duobus requisitis erit satisfaciendum.

§. 9. Conditioni *primae* ita satisfaciemus. Summa omnium potentiarum O R elementis O o applicatarum est $= \int \frac{xd\xi}{a}$; sed praeter hanc potentiarum classem alia adhuc potentia est consideranda ab obliqua fili actione oriunda, tenditur enim filum A D à toto virgae pondere M (quia excursiones virgae censentur infinite paruae) et propter fili reactionem punctum D trahitur simul in directione D A pari potentia M, vnde sequitur ex resolutione potentiarum virgam in puncto D extrorsum trahi potentia quae est $= \frac{EN}{ED} \times M = \frac{(n-\alpha)q}{n(\alpha+g)} \times M$. Est itaque summa omnium et singularum potentiarum horizontalium

talium virgam extrorſum trahentium $= \int \frac{x d\xi}{a} + \frac{(n-\alpha)q}{n(\alpha+g)}$. M. Iam vero inquiramus in ſummam potentiarum contrariarum, quae virgam horizontaliter introrſum ad ſitum verticalem trahunt: hae omnes oriuntur à grauitate virgae, eſtque ſumma earum $= \frac{DC}{DB} \cdot M = \frac{q}{\alpha+g} \cdot M$. Habemus itaque vi primae conditionis hanc aequationem.

$$\int \frac{x d\xi}{a} + \frac{(n-\alpha)q}{n(\alpha+g)} \cdot M = \frac{q}{\alpha+g} \cdot M.$$

Eſt autem $\int x\, d\xi = BF \cdot M = (a+g) \cdot M$. Hoc igitur valore ſubſtituto reductaque aequatione prodit

$$\text{I. } n(a+g)^2 = a\,\alpha\,q.$$

Conditionem problematis *ſecundam* in praecedente paragrapho expoſitam ſic implebimus; Eſt momentum potentiae O R ad vectem G D circa punctum D extrorſum rotandum $= \frac{x d\xi}{a} \cdot OD = \frac{x d\xi}{a} \cdot (x-\alpha)$ et ſumma omnium momentorum $= \int \frac{(x-\alpha) x d\xi}{a}$; tenſio fili hic nequicquam facit: momentum autem omnium potentiarum, contrariarum, quae à pondere virgae oriuntur, habetur ſi pondus totius virgae M applicatum putetur in centro grauitatis E, iſtudque pondus multiplicetur per rationem $\frac{EF}{EB}$ atque per longitudinem vectis E D, id eſt, per $\frac{g}{\alpha+g}$ et per g: eſt itaque momentum omnium potentiarum contrariarum $= \frac{gq}{\alpha+g} \times M$: Vnde habemus nunc hanc aequationem

$$\int \frac{(x-\alpha) x d\xi}{a} = \frac{gq}{\alpha+g} \times M.$$

Poterimus autem quantitati iſti ſummatoriae $\int \frac{(x-\alpha) x d\xi}{a}$ aliam ſubſtituere intelligibiliorem; ponatur nempe C Q ſeu $x - \alpha = y$ erit $\int \frac{(x+\alpha) \cdot x d\xi}{a} = \int \frac{\alpha y d\xi}{a} + \int \frac{yy d\xi}{a} = \frac{\alpha g M}{a} + \int \frac{yy d\xi}{a}$

Vt vero intelligatur etiam terminus $\int \frac{yy d\xi}{a}$, notandum eſt, longitudinem penduli ſimplicis (quam vocabimus L) iſochroni

chroni cum oſcillationibus minimis virgae C H ex puncto fixo C ſuspenſae eſſe $= \frac{\int yyd\xi}{gM}$ adeo vt ſit $\frac{\int yyd\xi}{gM} = L$ atque adeo $\int \frac{yyd\xi}{a} = \frac{LgM}{a}$. Eſt igitur $\int \frac{(x-a)xd\xi}{a} = \frac{\alpha gM}{a} + \frac{LgM}{a}$: Hoc igitur valore ſubſtituto in praemiſſa aequatione oritur haec alia $\frac{\alpha gM}{a} + \frac{LgM}{a} = \frac{gq}{\alpha+g} . M$, quae reducta dat

$$\text{II. } (\alpha + L) . (\alpha + g) = a q$$

Ope duarum, quas inuenimus, aequationum, eliminanda prius eſt arbitraria aſſumta a deindeque determinandus valor incognitae α per quantitates pure cognitas. Hoc modo inuenitur

$$\alpha = \frac{n - L \pm \sqrt{(\overline{n-L}^2 + 4ng)}}{2}$$

Et haec aequatio determinat ſitum virgae extremum D G, quod negotium, in quo omne problematis momentum poſitum eſt, in hoc paragrapho expedire conſtitueram. Situm autem ſimilem virga, dum oſcillationes vniformes perficit, perpetuo ſeruabit, ita vt virga in omni ſitu continuata tranſeat per idem punctum B. Nec tamen inde concludendum eſt virgam eadem lege oſcillationes ſuas perficere atque ſi ex virga rigida D B omni grauitate deſtituta eſſet ſuſpenſa, quia linea D B non exacte eandem longitudinem ſeruat.

§. 10. Determinato valore ipſius α facile eſt longitudinem quaeſitam penduli ſimplicis iſochroni definire: Quia enim cuiusuis elementi O o vis acceleratrix eſt $= \frac{x}{a}$, via autem ab eodem puncto deſcribenda ſeu O Q $= \frac{qx}{\alpha+g}$ et quia longitudo penduli iſochroni habetur diuidendo viam deſcribendam per vim acceleratricem, erit longitudo iſta $= \frac{aq}{\alpha+g}$: Eſt autem per aequationem ſecundam praecedencedentis paragraphi $a q = (\alpha + L) . (\alpha + g$; erit itaque longitudo quaeſita penduli ſimplicis iſochroni l ſimpliciter $= \alpha + L$, ſiue (per §. 9.)

$$l = \frac{n + L \pm \sqrt{(\overline{n - L}^2 + 4ng)}}{2}.$$

§. 11. Aequationes quas in duobus ſuperioribus paragraphis eruimus, ſingulares nos docent proprietates, quibus hae oſcillationes gaudent. Memorabimus ſequentes

(a) Praecipue notandum eſt, duobus modis oſcillationes fieri poſſe vniformes, prouti in expreſſione quantitatis α ex ſignis, quae quantitati radicali praefiguntur, ſeligatur vel ſuperius vel inferius: ſi autem ſuperius accipitur, ſimul etiam ſuperius eſt ſeligendum in expreſſione quantitatis l idemque de ſigno inferiori dicendum. Pro ſigno itaque ſuperiori oſcillationes fiunt multo tardiores quam pro inferiori: tardiores autem plerumque parum admodum differunt ab oſcillationibus Hugenianis pro ſyſtemate rigido.

(b) Si longitudo virgae minima ſit reſpectu habito ad longitudinem fili ex quo virga ſuſpenditur, erunt etiam quantitates L et g minimae, fietque proxime $l = n + g$, ſi ſignum ex ambiguis affirmatiuum ponatur aut $l = L - g$ ſi ſignum negatiuum accipiatur; in caſu priori fit $\alpha = n - L - g$, in poſteriori $\alpha = - g$: in hoc igitur caſu virga circa centrum ſuum grauitatis veluti rotatur inter oſcillandum habetque longitudinem penduli ſimplicis iſochroni aequalem diſtantiae centri grauitatis à centro oſcillationis quod virgae competeret, ſi ex puncto fixo C ſuſpenderetur.

(*c*) Si è contrario virga longiſſima ex filo breuiſſimo ſuspenſa ſit, erit in caſu priori $\alpha = \frac{ng}{L}$ et $l = L + \frac{ng}{L}$, at vero in caſu poſteriori, qui hic notari praecipue meretur, habebimus proxime $\alpha = -L$ et $l = n - \frac{ng}{L}$, quod indicat, fieri nunc inter oſcillandum rotationem circa centrum oſcillationis quod virgae ex puncto fixo l ſuspenſae competit et eſſe tunc longitudinem penduli iſochroni $l = \frac{L-g}{L} \times n$.

(*d*) Si virga ex centro grauitatis ſuspenſa ſit, euaneſcit poſterior oſcillationum claſſis fitque pro claſſe priori $\alpha = \infty$ et $l =$ longitudini fili.

Ceterum obſeruandum eſt ſolutionem noſtram minime requirere, vt filum virgae ex eiusdem ſummitate alligatum putetur: poteſt enim ex quocunque puncto eſſe alligatum. Igitur per punctum D aut C non intelligitur virgae ſummitas ſed punctum ex quo virga filo eſt annexa. Figura ſexta litteris ſuis analogis oſtendit exemplum ſecundae oſcillationum claſſis: tum etiam figura ſeptima et octava ambas oſcillationum claſſes illuſtrant, quum virgae non ſunt ex ſummitate ſuſpenſae. Tab. II.

§. 12. Iſta quae diximus nunc porro illuſtrabimus exemplis particularibus, ſupponendo ſcilicet virgas homogeneas et vniformiter craſſas, quarum longitudines deſignabimus per m: ſic erit $g = \frac{1}{2} m$ et $L = \frac{2}{3} m$, ſi virgae ſunt ex ſummitate ſua ſuspenſae: his autem valoribus ſubſtitutis fit $\alpha = \frac{3n - 2m \pm \sqrt{(9nn + 6mn + 4mm)}}{6}$ atque $l = \frac{3n + 2m \pm \sqrt{(9nn + 6mn + 4mm)}}{6}$ ſi vero virga ratione fili ſit praelonga ſimulque ad modum figurae ſextae oſcilletur, fiet C B dupla ipſius B H et longitudo penduli ſimplicis iſochroni

chroni eſt aequalis quartae parti longitudinis fili virgam ſuſpendentis. Igitur ſic virgae longiores breuioresque, modo ex eodem filo breuiſſimo ſuſpendantur, in hoc oſcillationum genere iſochronae ſunt.

§. 13. Denique etiam exemplum dabo virgae vniformis ex puncto aliquo intermedio ſuſpenſae. Ponamus itaque longitudinem virgae $m = 3$, putemusque diſtantiam puncti ſuſpenſionis D vel C. (fig. 7. et 8.) a ſummitate virgae $= 1$, longitudinem autem fili DA vel CA expreſſam per $n = 2$; hae poſitiones faciunt $g = \frac{1}{2}$ et $L = 2$ hincque fit pro oſcillationibus tardioribus, quae ad norman figurae ſeptimae perficiuntur, $\alpha = 1$, ſic vt in hoc exemplo ſummitas virgae veluti immobilis maneat nec a ſitu lineae verticalis recedat, ſtatim atque oſcillationes factae ſunt vniformes: erit autem longitudo penduli ſimplicis iſochroni aequalis ipſi longitudini virgae, id eſt, $l = 3$. At vero pro altera oſcillationum claſſe, quae figurae octavae reſpondent, fit $\alpha = -1$ et longitudo penduli iſochroni aequalis tertiae parti longitudinis virgae, ſiue $l = 1$. Tab. II.

§. 14. Poſtquam ſic generaliſſime hoc argumentum expediuimus, pro linea recta vtcunque inaequaliter graui, facillimum eſt ſolutionem extendere ad plana et ad corpora qualiacunque, imo non difficile eſt videre, ſolutionem cum ea quam dedimus, prorſus eandem eſſe: cum enim, vt hoc ſolum moneam, oſcillationes noſtrae compoſitae ſint ex duabus oſcillationum ſimplicium claſſibus, nimirum fili circa punctum A et virgae circa punctum D, perſpicuum eſt, neutram mutari, ſi loco virgae filo in D appendatur planum vel corpus quodcunque, cuius tam centrum grauitatis, quam centrum oſcillationis, quum

 pun-

punctum suspensionis D vt fixum consideratur, eadem manent. Erunt itaque aequationes nostrae pro α et l semper verae si per n intelligatur distantia inter duos axes horizontales ac parallelos per puncta A et D transeuntes, sique simul per L intelligatur distantia centri oscillationis ab axe per punctum C aut D transeunte, cum axis iste immobilis est, et si denique pro g substituatur distantia centri grauitatis a praefato axe per punctum C aut D transeunte.

§. 15 Sic igitur problemati nostro secundum totam eius extensionem satisfactum est, indeque simul illustratam atque confirmatam puto sententiam nostram, in omni systemate oscillationes compositas, quarum singularum duratio et excursionis magnitudo a se inuicem pendent, vtcunque statim sint inaequales et perturbatae, tandem fieri vniformes et inter se tautochronas: saltem hoc certum est, posse singularum oscillationum excursionibus talem assignari proportionem, siue excursiones istae maiores siue minores sint per se, vt cum singulae simul incipiunt, simul etiam finiantur, atque sic constanter vniformes et inter se tautochronae permaneant.

EMEN-

EMENDATIO TABVLARVM ASTRONOMICARVM PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quemadmodum ex tribus planetae cuiusque primarii locis heliocentricis cum integro tempore periodico comparatis orbita planetae inuestigari atque tabulae astronomicae confici queant, in Comment. Tomo VII. fusius exposui. Cum autem non solum difficile summopere sit loca heliocentrica ex obseruationibus eruere, sed etiam ad orbitarum determinationem loca tam exquisita nullique vel minimo errori obnoxia requirantur, methodus ibi tradita neque semper neque satis tuto ad hoc institutum adhiberi potest. Atque hanc ob caussam iam illo tempore ad orbitam solis vel potius terrae definiendam potissimum adstruxi, eo quod singula solis loca geocentrica obseruata totidem praebeant terrae loca heliocentrica, quae adeo satis copiose exhiberi possunt. Tab. II.

§ 2. Ad loca autem heliocentrica planetarum primariorum accurate obseruanda tot diligentissime institutis obseruationibus tantaque circumspectione opus est, vt non

 facile

facile pro quouis planeta terna tantum eiusmodi loca ex tanta obseruationum multitudine deriuari queant. Neque vero ad istud institutum ternae obseruationes quaecunque heliocentricae sunt accommodatae, sed eiusmodi tria loca requiruntur, quae in orbita planetae satis a se inuicem sint remota, ex quo intelligitur maiorem locorum heliocentricorum numerum pro singulis planetis requiri, quo delectus ternarum obseruationum maxime idonearum instituì queat.

§. 3. Tres autem omnino habentur modi ex obseruationibus planetarum loca heliocentrica concludendi, qui omnes absolutam ac perfectam solis theoriam postulant: quam quidem tanquam satis cognitam assumere licet, cum ea per methodum ante expositam ex obseruationibus exactissime colligi queat. Primus modus consistit in obseruatione oppositionis cuiusque planetae cum sole, qui vero tantum ad planetas superiores patet, cum in inferioribus oppositio solis nunquam contingat. Neque vero oppositio planetarum respectu solis immediate obseruari potest, sed ea demum ex pluribus obseruationibus circa oppositionis tempus institutis deriuari debet. Ex huiusmodi scilicet obseruationibus per computationem verum momentum temporis, quo planeta soli e diametro opponitur, definitur, quo ipso momento locus terrae heliocentricus cum planetae loco heliocentrico congruet; siquidem planeta in ipsa ecliptica moueri ponatur. Quodsi autem planeta cum latitudine obseruetur, tum istud momentum oppositionis ex obseruationibus collectum vlteriore correctione indiget, vt vera oppositio secundum longitudinem inueniatur, in quo negotio ipsa iam planetae theoria quasi cognita assumi debet.

§. 4.

§. 4. In planetis inferioribus Venere et Mercurio quia oppoſitiones cum ſole non contingunt, eorum coniunctiones cum ſole diligenter ſolent obſeruari: ex his enim pari modo loca heliocentrica deriuari poſſunt. Interim tamen iſtiusmodi obſeruationes ob ſummam horum planetarum et ſolis propinquitatem hoc tempore perraro et non ſatis accurate inſtitui poſſunt. Quare ex hoc obſeruationum genere in iis tantum maxima fiducia poni poteſt, in quibus iſti planetae in ipſo ſolis diſco conſpiciuntur. Hoc autem non ſolum rariſſime euenit, ſed etiam iis tantum temporibus, quibus hi planetae nodis ſuis ſunt proximi; ex quo per hanc viam duo tantum loca heliocentrica in orbita planetae diuerſa elicere licet, quae ad theoriam ſtabiliendam non ſufficiunt. Neque vero ex planetarum inferiorum elongationibus maximis a ſole obſeruatis loca heliocentrica deduci poſſunt, niſi orbitae planetarum circulares aſſumantur, quae poſitio pro Mercurio a veritate nimium abhorret. Ex quibus clariſſime perſpicitur, quam parum vtilitatis loca planetarum heliocentrica ex oppoſitionibus et coniunctionibus cum ſole collecta ad noſtrum inſtitutum afferre queant.

§. 5. Alter modus loca heliocentrica planetarum ex obſeruationibus aſtronomicis concludendi, in obſeruatione latitudinis cuiusque planetae conſiſtit; ex qua ſi tam loci nodorum quam inclinatio orbitae planetae ad planum eclipticae iam ante fuerit cognita, locus planetae heliocentricus vtique colligi poteſt, quemadmodum oſtenditur in Aſtronomica Gregorii. Sed quamuis haec requiſita exactiſſime eſſent cognita, tamen vel minimus error in obſeruatione commiſſus, qui euitari nullo modo poteſt, conclusionem

clusionem maxime incertam reddet. Primum enim manifestum est, si planetae orbita ab ecliptica prorsus non discreparet, per hanc methodum nihil omnino ad locum heliocentricum determinandum, inferri posse; ex hoc vero sponte sequitur, si inclinationes orbitarum admodum sint exiguae vti reuera sunt, tum istam methodum ingentibus erroribus obnoxiam esse oportere; ita vt ea in nostro instituto, in quo exactissima loca heliocentrica desideramus, nullius plane vsus esse possit.

§. 6. His autem duobus modis expositis loca heliocentrica planetarum inuestigandi, tertius modus longe anteferendus esse videtur, qui neque latitudinem planetae spectat, neque determinatum situm respectu solis requirit. Tempus autem periodicum planetae, cui iste modus accommodatur, accuratissime cognitum ac determinatum esse oportet, id quod ex tot obseruationibus tam longo temporis interuallo factis, satis exacte colligi potest. Quodsi enim binae eiusmodi planetae obseruationes eligantur, quae integro tempore periodico a se inuicem distant, certum erit planetam vtraque obseruatione in eodem orbitae suae loco versatum esse, etiamsi ex terra in diuersis coeli locis conspiciatur. Ex hac ipsa autem differentia locorum geocentricorum verus locus heliocentricus facile concluditur. Interim tamen haec methodus alias tutissima hoc habet incommodi, quod difficulter et raro ad datum quoduis temporis momentum situs cuiusque planetae in coelo obseruari possit.

§. 7 Cum igitur loca heliocentrica planetarum vel non satis exacta, qualia requirimus, exhiberi queant, vel tanta temporum opportunitas ad ea definienda postuletur,

qualis

qualis raro contingere ſolet, in eam incidi cogitationem, quemadmodum per loca quaecunque geocentrica orbitae planetarum determinari, ac tabulae aſtronomicae confici queant. Quanquam autem mox intellexeram, problema hoc eſſe determinatum; atque ex aliquot locis geocentricis orbitas planetarum determinari, tamen ipſa ſolutio tantopere fit difficilis et moleſtiſſimis calculis implicata, vt ea nullo modo ad finem perduci, multo minus ad vſum accommodari queat. Perſpicuum quidem eſt praeter tempus periodicum planetae cognitum tria loca geocentrica ad problema determinandum ſufficere, verum, quia quivis locus geocentricus primum loco ſolis, et deinde tam longitudine quam latitudine planetae definiri debent, tot quantitates diuerſae in calculum introduci debent, vt is non maxime intricatus fieri omnino nequeat.

§. 8. Poſtquam autem cogitaſſem orbitas planetarum nunc quidem non adeo eſſe incognitas, vt earum inueſtigatio a primis principiis repeti debeat, motusque ipſorum planetarum omnino ignoretur; ſed non ſolum tempora periodica per plurimas obſeruationes accuratiſſime iam eſſe definita, verum etiam ipſas orbitas ſatis prope cognitas haberi: ex his ſi debito modo in calculum inferantur, facile proſpexi, laborem vehementer ſubleuari poſſe. Quando enim non tam verus planetarum motus ex ſolis obſeruationibus, quam eius tantum aberratio a theoria iam ſtabilita, quae minima eſt, indagatur, calculus ex eo principio facilior reddetur, quod errores theoriae ſeu tabularum aſtronomicarum tanquam quantitates infinite paruae tractari queant, quo ipſo formulae et aequationes alias intricatiſſimae ſatis planae et ſimplices fieri ſolent.

§. 9. Negotium igitur, quod in hac diſſertatione mihi expediendum ſumſi, in hoc conſtat, vt tabulas aſtronomicas vſu receptas, quae quidem ad veram theoriam motus planetarum ſint conſtructae, per aliquot obſeruationes ſeu loca geocentrica corrigam, atque definiam, quantum illae a veritate diſſentiant; errore enim cognito tabulae etiam maxime vitioſae facili negotio emendabuntur. In hoc autem inſtituto ipſas aberrationes tabularum a veritate, in quas inquiro, tanquam quantitates infinite paruas ſeu differentiales ſum contemplaturus, ita vt termini, in quibus earum plures dimenſiones occurrunt, tuto negligi queant. Videndum igitur erit, quantum loca planetae obſeruata a locis, quae tabulae pro iisdem temporibus ſuppeditant, cum ſecundum longitudinem tum latitudinem differant, quae ipſa diſcrimina tam erunt exigua, vt inſtar quantitatum differentialium tractari queant; deinde ex his ipſis differentiis definiri debebit, quantum et quibus in locis tabulae immutandae ſint, vt cum obſeruationibus perfectiſſime conſentiant.

§. 10. Quoniam autem orbitae planetarum determinari ex obſeruationibus terreſtribus non poſſunt, niſi orbita terrae perfecte ſit cognita, eam hic tanquam perfecte cognitam aſſumo, ita vt eius ope locus ſolis ad quodvis tempus ſine vllo errore aſſignari queat. Ad motum quidem ſolis definiendum maxime accommodata eſt methodus ſupra memorata determinandi orbitas planetarum ex tribus locis heliocentricis; verum tamen hic quoque modum trademus theoriam ſolis quamcunque, ſi correctione egeat, per obſeruationes corrigendi. Hocque modo etiam

etiam facilius vera ſolis theoria obtinebitur, quam ſi ea omnino a priori indagari deberet.

§. 11. Deinde etiam data pono ſingulorum planetarum tempora periodica, quippe quae ex tot ſeculorum interuallo inſtitutis obſeruationbus multo accuratius ſunt definita, quam per obſeruationes nunc inſtituendas vel exquiſitiſſimas expectari poſſet. Ex datis autem temporibus periodicis planetarum ſimul ratio, quam inter ſe tenent orbitarum axes trasuerſi, ſeu diſtantiae a ſole mediae, innoteſcit; omnino enim ſequi conueniet theoriam motus planetarum a Newtono ſtabilitam. Hanc autem theoriam ſecuturus ſingulorum planetarum tam aphelia quam nodos reſpectu ſtellarum fixarum quieſcere aſſumo; ſeu ipſis reſpectu aequinoctiorum motum ipſi praeceſſioni aequinoctiorum aequalem tribuo. Quae aſſumtio vti rationi maxime eſt conſentanea, ita etiam cum obſeruationibus apprime conſentit. neque, vti quibusdam aſtronomis videtur, per obſeruationes refellitur.

§. 12. Quodſi nunc tabulas aſtronomicas contemplemur, ex quibus loca planetarum ſupputari ſolent, deprehendemus eas quinque rebus ex obſeruationibus deſumtis niti, totidemque propterea nominibus erroneas eſſe poſſe. Primum enim error in loco aphelii aſſumto ineſſe poteſt, ita vt eius vera longitudo vel maior ſit vel minor, quam in tabulis ponitur. Secundo excentricitas orbitae ſeu ſolis diſtantia a centro orbitae vel nimis magna vel nimis parua aſſumta eſſe poteſt. Tertio vero error ineſſe poteſt in anomalia media, quae ad datam aeram conſtituitur: ita vt ea vel maior ſtatui debeat vel minor, qui error ſi quis fuerit deprehenſus pro quouis tempore idem manebit, ſi quidem tempus periodicum recte eſt aſſumtum. Quarto loca nodorum in tabulis aſſignata poſſunt eſſe vitioſa, etſi his maxime fidere poſſe videmur. Quinto denique euenire poteſt, vt inclinatio orbitae ad eclipticam, quae in tabulis ponitur, a veritate recedat. Fieri igitur poteſt, vt tabulae aſtromicae quintuplici correctione opus habeant.

§. 13. Vnus autem planetae locus ex obſeruationibus deductus duplici modo a tabulis diſſentire poteſt ratione ſcilicet vel longitudinis vel latitudinis. Quare ſi ſinguli diſſenſus obſeruationum a tabulis ad totidem tabularum errores detegendos ſufficiant, bina alicuius planetae loca geocentrica obſeruata non erunt ſufficientia ad quinque errores corrigendos, terna autem non ſolum omnes errores, qui in tabulis ineſſe poſſint, patefacient et corrigent, ſed vna etiam conditio redundabit, quae ad confirmationem emendationis inſtituendae adhiberi poteſt. Ita ſe res habet ſi quinque erroribus tabulae ſint obnoxiae, ex quo videri poſſet, paucioribus obſeruationibus negotium expediri poſſe, ſi inclinatio et nodi recte conſtituti ſint in tabulis: nihilo tamen minus etiam tum tribus opus erit obſeruationibus, cum ipſae obſaruationes veritatem nodorum et inclinationis orbitae in tabulis aſſumtae declarare debeant.

§. 14. Ponamus iam pro quocunque planeta cuius correctio ſuſcipitur, eius diſtantiam a ſole mediam ſeu orbitae ipſius ſemiaxem transuerſum eſſe $= a$ cuius quantitas, quia a ſolo tempore periodico pendet in tabulis recte aſſignata ponitur, ita vt correctione non egeat. Deinde ſit excentricitas ſeu diſtantia ſolis a centro orbitae ad diſtantiam mediam applicata, qualis in tabulis habetur $= k$, vera autem excentricitas ſit $= k + dk$. Tertia anomalia

malia media in tabulis ad quoduis tempus exhibita ita a veritate discrepet, vt ea perpetuo augeri debeat angulo dm. Quarto sit longitudo aphelii in tabulis exhibita, atque a prima stella arietis computata $= p$, vera autem eiusdem aphelii longitudo sit $= p + dp$. Quinto sit longitudo nodi ascendentis in tabulis posita a prima pariter stella arietis computata $= q$; at vera eiusdem nodi longitudo sit $q + dq$. Sexto denique sit inclinatio orbitae planetae ad planum eclipticae, quae in tabulis indicatur $= n$; vera autem inclinatio sit $= n + dn$.

§. 15. Ex tabulis ergo astronomicis quibusque habentur valores literarum a, k, n, p et q, ex quibus distantiam mediam a ex tempore periodico deductam reliquas litteras vero vndecunque ex obseruationibus conclusas esse pono. Praeter hos vero valores nihil quicquam ex tabulis desumam; aequationem enim anomaliae mediae vel addendam vel subtrahendam non ex tabulis desumam, sed ipse quouis casu calculo definiam, non tam quasi tabulis aequationum parum confiderem, quam quia iste ipse calculus quo aequatio anomaliae definitur, ad correctiones instituendas requiritur. Correctio autem in hoc consistet, vt errores tabularum a veritate, quos his expressionibus differentialibus dk, dm, dp, dq et dn denotaui, determinem; hoc enim facto, dubium erit nullum, quin tabulae perfectissime sint emendatae, si quidem obseruationibus certissimis ad has correctiones vtamur.

§. 16. Eiusmodi autem obseruationes adhiberi conuenit, quibus planetae ad datum tempus tam longitudo quam latitudo contineatur; sit igitur pro definito quodam tempore longitudo planetae ex obseruationibus deducta =

 F,

F, quae pariter a prima ſtella arietis ſit computata, latitudo vero ſit $= G$. Ad idem vero tempus locus planetae ex tabulis ſupputetur, ſitque longitudo ex tabulis inuenta $= f$, latitudo autem $= g$. Quodſi vero tabulis correctis vti liceret, foret longitudo $= f + df$, et latitudo $= g + dg$, quae perfecte cum obſeruationibus conſentire deberent; erit itaque $F = f + df$ atque $G = g + dg$, hincque $df = F - f$ et $dg = G - g$. Cognoſcentur igitur iſti valores df et dq, quos tanquam differentialia ſpecto, ex comparatione tabularum aſtronomicarum cum obſeruationibus; iidem vero ex aſſumtis tabularum erroribus dk, dm, dp, dq, et dn definiri poterunt; vnde viciſſim errores tabularum per obſeruationes dignoſci, ipſaeque tabulae corrigi poterunt.

§. 17. Cum igitur habetur obſeruatio planetae omnibus numeris abſoluta, ad id tempus, quo obſeruatio eſt facta, locus planetae hoc eſt eius longitudo ac latitudo ex tabulis ſupputetur; quas litteris f et g deſignaui. Quod ſi autem valores f et g ex tabulis eruantur, compoſiti erunt ex litteris cognitis, quibus tabulae ſunt ſuperſtructae, ſcilicet a, k, p, q et n, eruntque harum litterarum quaſi functiones. Ex his vero ipſis valoribus per calculum differentialem definiri poterunt longitudo $f + df$ et latitudo $g + dg$, ponendo $k + dk$; $p + dp$; $q + dq$; $n + dn$ loco k, p, q et n, atque anomaliam mediam tabularem augendo angulo dm, etiamſi ipſae qnantitates hae differentiales dk, dp, dq, dn et dm ſint per ſe incognitae. Quoniam auten longitudo $f + df$ et latitudo $g + dg$ ex tabulis correctis nata cum longitudine et latitudine obſeruata congruere debet, hae differentiae df et dq ex diſcrimine tabula-

tabularum et obſeruationis primum cognoſcentur, eaedem vero etiam per correctiones adhibendas determinabuntur, vnde huius modi binae aequationes ex qualibet obſeruatione conficientur

$$df = A\,dm + B\,dk + C\,dp + D\,dq + E\,dn$$
$$dg = \alpha\,dm + \beta\,dk + \gamma\,dp + \delta\,dq + \varepsilon\,dn$$

atque cum ex tribus obſeruationibus ſex huiusmodi aequationes oriantur, eae abunde ſufficient ad valores differentiales dm, dk, dp, dq et dn determinandos, quibus determinatis tota tabularum aſtronomicarum correctio erit abſoluta.

§. 18. Videamus igitur quemadmodum ex iis rebus datis, quibus tabulae inniti ſolent, et quas litteris a, k, p, q et n indicauimus, ad datum tempus planetae tam longitudo quam latitudo computari debeat. Ad datum igitur tempus ante omnia tabulae praebent planetae anomaliam mediam, quae ſit $= x$, qua cognita inueſtigari debet anomalia excentri, quam tautisper littera v indicemus. Ita autem haec anomalia excentri cum anomalia media eſt connexa vt ſit $x = v + k$ ſin. v ex qua aequatione quidem data anomalia excentri, anomalia media per transmutationem ſinuum in arcus facile definitur. At viciſſim ex anomalia media, excentri anomalia per hanc aequationem determinabitur $v = x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x -$ etc. quae etſi eſt infinita, tamen facili negotio valorem ipſius v tam prope ſuggerit, quam quidem ad inſtitutum requiri poteſt. In circulo ſcilicet, cuius radius eſt 1. quaeritur arcus aequalis ipſi k ſin. x. isque ab anomalia media x ſubtrahatur; reſidui arcus denuo ſumatur ſinus, eique per k multiplicato arcus capiatur aequalis,

qui

qui denuo ab anomalia media x auferatur: arcus residui iterum sinus sumatur, eique per k multiplicato arcus aequalis sumatur, ab anomalia media x subtrahendus; haecque operatio tam diu repetatur, quoad residui arcus amplius neque crescant neque decrescant, quod si euenerit, id quod semper ante quartam operationem continget, vltimum residuum dabit valorem anomaliae excentri v. Interim in hoc negotio annotari oportet, quod si anomaliae mediae sinus fuerit negatiuus, arcus inde natos quoque futuros esse negatiuos, ac propterea ab z non subtrahi, sed ad id addi debere; quod ei, qui in calculo est exercitatus nullam pariet difficultatem, Ex tabulis itaque ad datum tempus planetae cognoscitur anomalia media, atque ex hac coniunctim cum excentricitate k reperietur anomalia excentri v.

§. 19. Cognita anomalia excentri v, ex ea primum facillime colligitur vera planetae distantia a sole, vel eius ratio ad distantiam mediam a; posita enim planetae distantia a sole $= y$, erit $y = a(1 + k \text{ cos}. v)$ Deinde etiam ex anomalia excentri v inueniri potest vera anomalia planetae, seu eius ab aphelio distantia ex sole visa; quodsi enim planetae anomalia vera ponatur $= z$, poterit satis commode valor ipsius z ex hac aequatione etsi infinita expedite determinari, qua est $z = v - k \text{ sin}. v + \frac{1}{4}k^2 \text{ sin}. 2v - \frac{1}{12}k^3(\text{sin}. 3v + 3 \text{ sin}. v) + \text{etc.}$ aptior autem ad praesens institutum est haec aequatio, qua valor ipsius z absolute reperitur; qua est $\text{cos}. z = \frac{k + \text{cos}. v}{1 + k \text{ cos}. v} = \frac{a}{y}(k + \text{cos}. v)$ ob $y = a(1 + k \text{ cos}. v)$: vel per sinus versos hoc modo: $\text{sinv}. z = \frac{(1-k) \text{ sinv}. v}{1 + k \text{ cos}. v}$; vel etiam per sinus ita: $\text{sin}. z = \frac{\text{sin}. v. \sqrt{(1-k^2)}}{1 + k \text{ cos}. v} = \frac{a}{y} \text{ sin}. v. \sqrt{(1 - k^2)}$.

§. 20.

§. 20. Ex anomalia vera hoc modo inuenta, atque ex datis orbitae planetae aphelio, nodo aſcendente, et inclinatione ad eclipticam porro planetae longitudo ac latitudo heliocentrica ſequenti modo definientur: Repraeſentet Tab. II. circulus ♈ N ap ♎ in cuius centro S ſol verſatur eclipticam fig. 9. et N A P n orbitam planetae in coelo proiectam; ſitque ♈ prima ſtella arietis ſeu potius eius locus ad eclipticam relatus, N orbitae planetae nodus aſcendens, A aphelium orbitae planetae, et P eius locus, quem pro dato tempore tabulae monſtrant. Centro porro S per A et P arcus circulares A a et P p normales ad eclipticam ducantur, quorum ille A a ſeu potius angulus A S a latitudinem aphelii heliocentricam, hic vero P p ſeu angulus P S p ipſius planetae in P verſantis latitudinem heliocentricam praebet. Longitudo autem heliocentrica a prima ſtella arietis ♈ computata primum nodi aſcendentis N erit arcus ♈ N $= q$; deinde aphelii A arcus ♈ $a = p$ ipſius autem planetae in P exiſtentis longitudo heliocentrica erit arcus ♈ N ap; orbitae vero ad eclipticam inclinatio quam poſuimus $= n$, repraeſentatur angulo A N a ſeu P N p.

§. 21. Anomalia autem vera planetae z eſt arcus A P ſeu angulus A S P. Quare cum ſit N $a = p - p$ ex triangulo ſphaerico A N a elicitur arcus N A tangens $= \frac{tang.(p-q)}{coſ.\,n}$, hincque erit N A $=$ arcui, cuius tangens erit $= \frac{tang.(p-q)}{coſ.\,n}$; quem arcum, quia tam facile reperitur ponamus $= e$ ita vt ſit N A $= e$, et tang. $e = \frac{tang.(p-q)}{coſ.\,n}$. Cum nunc ſit arcus A P $= z$ erit arcus N A P $= e + z$, vnde reperitur tang. arcus N $ap =$ coſ. n. tang. $(e + z)$; ponatur iſte arcus N $ap = r$, ita vt ſit tang. $r =$ coſ. n. tang. $(e + z)$, erit

 $q + r$

$q+r$ longitudo planetae heliocentrica a prima ſtella arietis ♈ computata. Praeterea vero erit arcus Pp ſeu anguli PSp ſinus $=$ ſin. n. ſin. $(e+z)$, qui eſt ſinus latitudinis heliocentricae planetae ad boream declinantis; ſi quidem ea eſt affirmatiua. Ponamus autem hanc planetae latitudinem heliocentricam eſſe $= s$, erit ſin. $s =$ ſin. n. ſin. $(e+z)$.

§. 22. Vt haec facilius ſub conſpectum cadant, omnia in ſequenti tabella complecti viſum eſt. Erit igitur

Diſtantia planetae media a ſole	$= a$
Excentricitas	$= k$
Aphelii longitudo helioc.	$= p$
Nodi aſcendentis longit.	$= q$
Inclinatio orbitae	$= n$

Porro ad datum tempus ponatur.

Plan. anom. med. $= x$	$x = v + k$ ſin. v vel
Anomal. excent. $= v$	$v = x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x -$ etc.$)$
Diſtantia a ſole $= y$	$y = a(1 + k$ coſ. $v)$
Anomalia vera $= z$	coſ. $z = \frac{a}{y}(k +$ coſ. $v)$
Diſt. aph. a Nodo $= e$	tang. $e = \frac{\text{tang.}\,(p-q)}{\text{coſ.}\,n}$
Long. Plan. a nodo $= r$	tang. $r =$ coſ n tang. $(e+z)$
Long. plan. heliocentr. a pr. ✳ ♈ $= q+r$	
Lat. plan. heliocentrica boreal. $= s$	ſin. $s =$ ſin. n. ſin $(e+z)$

§. 23. Inuentis autem cum longitudine planetae, tum etiam latitudine heliocentrica, ex iis ſequenti modo longitudo et latitudo geocentrica determinabitur. Sit T terrae

rae locus eo momento, quo obſeruatio eſt facta, eius diſtantia a ſole $=c$; longitudo terrae a prima ſtella arietis computata ſeu angulus $\Upsilon ST = u$, ſit porro vt ante recta SN linea nodorum orbitae planetae, atque N eius nodus aſcendens, A aphelium, et P locus planetae ex tabulis in orbita inuentus. Ex P demittatur in planum eclipticae perpendiculum Pp, erit per praecedentia angulus ΥSp longitudo planetae heliocentrica $=q+r$: et angulus PSp ſeu latitudo heliocentrica $=s$. Quare cum ſit PS diſtantia planetae a ſole $=y$, erit $Pp = y$ ſin. s, et diſtanta a ſole curtata $Sp = y$ coſ. s. Iam in triangulo pST dantur, angulus $pST = u-q-r$, latus $pS = y$ coſ. s, et latus $ST = c$. Ducto ergo ex p in ST perpendiculo pV, erit $pV = y$ coſ. s. ſin. $(u-q-r)$, et S $V = y$ coſ. s. coſ $(u-q-r)$ vnde $TV = y$ coſ. s. coſ. $(u-q-r)-c$. Ex his fit anguli pTV tangens $= \frac{y \text{ coſ. } s. \text{ ſin. } (u-q-r)}{y \text{ coſ. } s. \text{ coſ. } (u-q-r)-c}$. Vocetur hic angulus $pTV = t$, ita vt ſit tang $t = \frac{y \text{ coſ. } s. \text{ ſin. } (u-q-r)}{y \text{ coſ. } s. \text{ coſ. } (u-q-r)-c}$. Quo inuento erit $u-t$ longitudo planetae geocentrica a prima ſtella arietis ſumta. Deinde eſt $Tp = \frac{y \text{ coſ. } s. \text{ ſin. } (u-q-r)}{\text{ſin. } t}$, vnde oritur $\frac{Pp}{Tp} = \frac{\text{ſin. } s. \text{ ſin. } t}{\text{coſ. } s. \text{ ſin} (u-q-r)} = \frac{\text{ſin. } t \text{ tang. } s}{\text{ſin. } (u-q-r)}$, quae expreſſio praebet tangentem latitudinis planetae geocentricae ſeu anguli PTp. Haec autem ſic coniunctim ſe habebunt. Fig. 10.

Diſtantia terrae a ſole	$=c$	
longitudo terrae	$=u$	
angulus quidam pTV	$=t$	tang. $t = \frac{y \text{ coſ. } s. \text{ ſin. } (u-q-r)}{y \text{ coſ. } s. \text{ coſ. } (u-q-r)-c}$
longitudo geocentrica	$=f$	$f = u-t$
latitudo geocentrica	$=g$	tang. $g = \frac{\text{ſin. } t. \text{ tang. } s}{\text{ſin. } (u-q-r)}$

§. 24. Hoc igitur modo ex poſitionibus, quae in tabulis aſſumuntur, ad datum tempus planetae determinantur longitudo et latitudo, primo quidem heliocentricae, tum vero etiam geocentricae: quae itaque recte ſe habere, et cum obſeruationibus conſpirare deberent, ſi quidem tabulae omni vitio carerent. Quodſi autem ponamus errores quam minimos tabulis ineſſe, ex iis, etſi nobis adhuc incognitis, loca planetae tamen corrigi poterunt. Cum igitur correctiones adhibendas inſtar differentialium earum quantitatum, quibus reſpondent, conſideremus et deſignemus, errores longitudinis et latitudinis planetae ex tabulis inuentae inueniemus, ſi ipſas expreſſiones pro iis erutas more ſolito differentiemus, ponendis iis quantitatibus variabilibus, in quibus errores ineſſe poſſunt. Differentialia autem quae in hoc calculo occurrent erunt haec dm; dk; dp; dq et dn, ex quibus differentialia reliquarum litterarum aſſumtitiarum determinari poterunt. Quoniam autem dm ſignificat errorem anomaliae mediae tabularis addendum, anomalia media ex tabulis inuenta x augeri debebit illa particula dm, ex quo erit $dx = dm$.

§. 25. Quia deinde eſt $x = v + k\,\text{ſin.}\,v$, erit differentiando $dx = dm = dv + dk\,\text{ſin.}\,v + kdv\,\text{coſ.}\,v$ hincque $dv = \frac{dm - dk\,\text{ſin.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v} = \frac{a}{y}(dm - dk\,\text{ſin.}\,v)$. Porro eſt $y = a(1 + k\,\text{coſ.}\,v)$, hincque $dy = adk\,\text{coſ.}\,v - akdv\,\text{ſin.}\,v$. in qua ſi loco dv valor ſuperior ſubſtituatur, prodibit $dy = \frac{adk\,\text{coſ.}\,v + akdk - akdm\,\text{ſin.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v} = adk\,\text{coſ.}\,z - \frac{akdm\,\text{ſin.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v}$. Ex aequatione autem $\text{coſ.}\,z = \frac{k + \text{coſ.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v}$ ſequitur $-dz\,\text{ſin.}\,z = \frac{dk\,\text{ſin.}\,v\,\text{ſin.}\,v - (-k^2)dv\,\text{ſin.}\,v}{(1 + k\,\text{coſ.}\,v)^2}$ quae poſito $(1 + k\,\text{coſ.}\,v)^2 = \frac{(1 - k^2)(\text{ſin.}\,v)}{(\text{ſin.}\,z)^2}$ praebet hanc $dz = \frac{dv\,\text{ſin.}\,z}{\text{ſin.}\,v} - \frac{dk\,\text{ſin.}\,z}{1 - kk} = \frac{adm\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} - \frac{adk\,\text{ſin.}\,z}{y} - \frac{dk\,\text{ſin.}\,z}{1 - kk}$.

§. 26.

§. 26. Dehinc ad differentialia reliquarum litterarum peruenimus, ac primo quidem aequatio tang. $e = \frac{tang\,(p-q)}{cos.\,n}$. praebet $d\,e = \frac{(dp - dq)\,cos.\,e)^2}{cos.\,n\,(cos.\,(p-q))^2} + \frac{dn\,sin\,n.\,tang.(p-q)(cos.\,e)^2}{(cos.\,n)^2}$. Sequens vero aequatio tang. $r =$ cos. n. tang. $(e + z)$ differentiata dat $\frac{d\,r}{(cos.\,r)^2} = -\,d\,n$ sin. n. tang. $(e + z)$ $+ \frac{(de + dz)\,cos.\,n}{(cos.\,(e+z))^2}$, in qua aequatione non expedit valores superiores loco $d\,e$ et $d\,z$ substituere, ne formulae nimis fiant intricatae. Interim tamen quouis exemplo oblato minori opera valor ipsius $d\,r$ per differentialia primitiua $d\,m$, $d\,k$, $d\,p$, $d\,q$, et $d\,n$ poterit definiri. Hoc autem inuento erit longitudinis heliocentricae $q + r$ differentiale $= d\,q + d\,r$. Latitudinis autem heliocentricae s differentiale determinabitur per hanc aequationem $d\,s$ cos. $s =$ $d\,n$ cos. n sin. $(e + z) + (d\,e + d\,z)$ sin. n. cos. $(e + z)$ Ex his itaque mutationes in longitudine et latitudine heliocentrica, quas quinque tabularum errores assumti atque per obseruationes determinandi producunt, cognoscuntur.

§. 27. Progrediamur igitur ad mutationes in longitudine ac latitudine geocentrica ortas definiendas, quo in negotio, quia solis theoriam perfectam ponimus, quantitates locum terrae determinantes, quae sunt c et u, tanquam constantes tractari oportet. Primum autem ad differentiale anguli t assignandum vtamur aequatione hac cot. $t =$ cot. $(u - q - r) - \frac{c}{y\,cos.\,s.\,sin.(u-q-r)}$ cuius differentiale est $\frac{-dt}{(sin.\,t)^2} = \frac{dq + dr}{(sin.\,(u-q-r))^2} + \frac{c\,dy}{yy\,cos.\,s\,sin.(u-q-r)} - \frac{c\,ds\,tang.\,s}{y\,cos.\,s\,sin.\,(u-q-r)}$ $- \frac{c\,(dq + dr)\,cot.\,(u-q-r)}{y\,cos.\,s\,sin.\,(u-q-r)}$. Inuento autem differentiali $d\,t$, erit longitudinis geocentricae f incrementum $d\,f = -\,d\,t =$ $\frac{(dq + dr)(sin.\,t)^2}{sin.\,(u-q-r))^2} + \frac{c\,dy\,(sin.\,t)^2}{yy\,cos.\,s\,sin.\,(u-q-r)} - \frac{c\,ds\,tang.\,s\,(sin.\,t)^2}{y\,cos.\,s\,sin.\,(u-q-r)} -$

$\frac{c(dq+dr)\cot.(u-q-r)(\sin.t)^2}{y\cos.s\sin.(u-q-r)}$. Latitudinis autem geocentricae g incrementum cognoſcetur ex hac aequatione differentiali

$$\frac{dg}{(\cos.g)^2} = \frac{ds\sin.t}{(\cos.s)^2\sin.(u-q-r)} - \frac{df\cos.t.\,\mathrm{tang}.s}{\sin.(u-q-r)} + \frac{(dq+dr)\sin.t.\,\mathrm{tang}.s}{\sin.(u-q-r)\,\mathrm{tang}.(u-q-r)}$$

§. 28. Quod ſi autem eo tempore, pro quo iſte calculus eſt factus, per obſeruationes habeatur locus planetae, eiusque longitudo geocentrica a prima ſtella arietis computata ſit $= F$, latitudo autem geocentrica $= G$; correctiones tabulae, quae conſiſtunt in valoribus dm, dk, dp, dq, et dn, ita debebunt eſſe comparatae, vt fiat, $df = F - f$ et $dg = G - g$. Quare cum df et dg ex aberratione tabularum ab obſeruationibus cognoscantur, ex tribus obſeruationibus determinari poterunt ipſa illa differentialia dm, dk, dp, dq et dn, quibus cognitis tabulae etiam correctae habebuntur. Erit ſcilicet pro tabula vera

Planetae diſtantia a ſole media	$= a$.
Excentricitas orbitae	$= k + dk$
Longitudo Aphelii heliocentrica	$= p + dp$
Longitudo nodi aſc. heliocentrica	$= q + dq$
Inclinatio orbitae planetae ad Eclipt.	$= n + dn$

Tabula autem mediorum motuum planetae ita corrigi debebit, vt anomalia media, quam tabulae ad quodvis tempus monſtrant, augeatur angulo dm. Atque hoc pacto tabulae, niſi enormiter a veritate aberrauerint, ita emendabuntur, vt tum perpetuo cum obſeruationibus quam exactiſſime conſentire debeant.

§. 29. Obſeruationes autem, quibus ad hoc propoſitum vti expedit, ſumma diligentia adhibita exquiſitiſſimis inſtrumentis factas eſſe oportet, vt de vero planetae loco

loco obſeruato omnino certi eſſe queamus, quamobrem hae obſeruationes a refractionibus ante penitus purgari debent, quam ex iis longitudo ac latitudo geocentrica planetae concludatur. Praeter has autem vſitatas cautiones maxime ratio propagationis lucis haberi debet, qua longitudo planetae obſeruata modo augetur modo diminuitur. Niſi enim haec correctio habeatur, motus planetae nequidem talis ſpectabitur, qualis cum theoria planetarum Kepleriana congruit: hancque praecipuam eſſe cauſam exiſtimo, quod etiamnunc per exactiſſimas obſeruationes tabulae aſtronomicae cum obſeruationibus penitus conciliari non potuerint. Viciſſim autem ſi tabulae prorſus ſint correctae, loca planetarum ex iis per calculum deducta non immediate cum obſeruationibus comparari conuenit, verum ea quoque in loca apparentia antea conuerti debent, adhibita ea correctione, quam propagatio lucis ſuppeditat: qua de re in ea diſſertatione, qua phaenomena a propagatione lucis ſucceſſiua oriunda expoſui, fuſius egi.

§. 30. Aequatio autem ex propagatione lucis orta pro terra ita ſe habet, vt longitudo terrae obſeruata perpetuo augeri debeat $20''$ quo facto is prodit terrae vel ſolis locus, in quo appareret, ſi lumen in inſtanti propagaretur. Ex cuiusuis autem planetae loco obſeruato locus verus, in quo conſpiceretur, ſi lumen in inſtanti ad nos perueniret, per ſequentem regulam eruetur. A loco planetae in ecliptica obſeruato, ſeu eius longitudine geocentrica obſeruata ſubtrahatur longitudo terrae, quam eo tempore obtinet, reſiduique arcus ſinus ſit $= \mu$, coſinus $= m$: tum quaeratur angulus cuius ſinus eſt $= \frac{\mu a}{b}$ eiusdemque anguli capiatur coſinus, qui ſit $= q$: ſeu a lon-

longitudine planetae geocentrica ſubtrahatur longitudo planetae heliocentrica et reſidui arcus capiatur coſinus, qui erit q, quo facto ad longitudinem planetae obſeruatam addi oportebit angulum, cuius ſinus eſt $\frac{s}{c}q - \frac{r}{c}m$. In his expreſſionibus denotat a diſtantiam terrae mediam a ſole, b diſtantiam planetae mediam a ſole; eſtque poſito $l\,a = 6{,}0000000$, pro ſingulis planetis vt ſequitur.

pro Saturno $l\,b = 6{,}9794600$
pro Ioue $l\,b = 6{,}7160965$
pro Marte $l\,b = 6{,}1829850$
pro Venere $l\,b = 5{,}8593365$
pro Mercurio $l\,b = 5{,}5878232$

Praeterea habet fractio $\frac{c}{r}$ valorem conſtantem; quo eſt
$l\frac{c}{r} = 4{,}0201540$
altera autem fractio $\frac{s}{c}$ pro ſingulis planetis peculiares induit valores, erit enim

pro Saturno $l\frac{c}{s} = 4{,}5098840$
pro Ioue $l\frac{c}{s} = 4{,}3782022$
pro Marte $l\frac{c}{s} = 4{,}1116465$
pro Venere $l\frac{c}{s} = 3{,}9498222$
pro Mercurio $l\frac{c}{s} = 3{,}8140656$

Calculus autem pro angulo illo addendo fiet facilior, ſi a logarithmis ſinuum $\frac{s}{c}q$ et $\frac{r}{c}m$ ſubtrahatur hic logarithmus conſtans $4{,}6855749$, reſiduorumque logarithmorum quaerantur numeri reſpondentes, qui praebebunt partes aequationis $\frac{c}{s}q$ et $\frac{r}{c}m$ in minutis ſecundis.

§. 31. Accommodemus nunc methodum hanc tabulas aſtronomicas corrigendi ad theoriam motus ſolis ſeu terrae

terrae emendandam; ſitque pro dato tempore longitudo terrae obſeruata $= F$, latitudo vero erit nulla. Si nunc ponatur in tabulis

Terrae diſtantia media a ſole $= a$
Excentricitas orbitae terrae $= k$
Longitudo aphelii $= p$.
Quae eſt longitudo perigaei ſolis.
Ad tempus obſeruationis ſit porro
Anomalia media ſolis $= x$
Anomalia excentri $= v$
Anomalia vera ſolis $= z$
Ex his ergo erit longitudo terrae $= p + z$, quae poſita eſt $= f$. Eſt autem vt vidimus $x = v + k\,\text{ſin.}\,v$ vel $v = x - k\,\text{ſin.}$ $(x - k\,\text{ſin.})(x - k\,\text{ſin.}(x - k\,\text{ſin.}(x - \text{etc.})$ et $\text{coſ.}\,z = \frac{a}{y}(k + \text{coſ.}\,v)$ exiſtente y terrae a ſole diſtantia hoc tempore, quae eſt $y = a\,(1 + k\,\text{coſ.}\,v)$.

§. 32. Ponamus autem tabulas has eſſe vitioſas, atque ad conſenſum cum veritate impetrandum anomalias medias augeri debere angulo dm; excentricitatem k elemento dk, et longitudinem aphelii p arculo dp. His autem correctionibus in tabulas introductis prodibit ad tempus obſeruationis

anomalia media ſolis $= x + dx = x + dm$
anomalia excentri $= v + dv = v + \frac{dm - dk\,\text{ſin.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v}$.
diſtantia a terra $= y + dy = y + e\,dk\,\text{coſ.}\,z - \frac{ak\,dm\,\text{ſin.}\,v}{1 + k\,\text{coſ.}\,v})$
anomalia vera $= z + dz = z + \frac{adm\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} - \frac{adk\,\text{ſin.}\,z}{y} - \frac{dk\,\text{ſin.}\,z}{1 - kk}$

longitudo igitur terrae ex his tabulis correctis prodibit $= p + z + dp + dz = f + df$, quae cum longitudine

 obſer-

obſeruata F congruere debet. Ex obſeruatione ergo habebitur $df = F - f = dp + dz = dp + \frac{adm\, ſin.\, z}{y\, ſin.\, v} - \frac{adk\, ſin.\, z}{y} - \frac{dk\, ſin.\, z}{1-kk}$. Obſeruatio igitur cum calculo ſecundum tabulas inſtituto comparata dat $df = F - f$, vnde ad tabulas corrigendas obtinetur ſequens aequatio

$$df = dp + \frac{adm\, ſin.\, z}{y\, ſin.\, v} - \frac{adk\, ſin.\, z}{y} - \frac{dk\, ſin.\, z}{1-kk}.$$

Tres igitur huiusmodi aequationes ex tribus obſeruationibus ſolis formatae ſufficient ad aberrationes tabularum ternas dm, dk et dp indicandas, atque adeo ad tabulas corrigendas.

§. 33. Similis fere correctio adhiberi poteſt pro tabulis cuiuscunque planetae primarii, ſi eius loca heliocentrica obſeruare liceat. Si enim ad datum tempus obſeruata ſit longitudo planetae heliocentrica F vna cum latitudine heliocentrica G; ad idem tempus ex tabulis corrigendis ſupputetur longitudo heliocentrica f et latitudo pariter heliocentrica g, ponaturque $F - f = df$ et $G - g = dg$.

Exhibeant autem tabulae:		reuera autem eſſe
Diſtantiam planetae mediam a ſole	$= a$	$= a$
Excentricitatem	$= k$	$= k + dk$
Aphelii longitud. heliocentricam	$= p$	$= p + dp$
Nodi aſcendentis long. heliocentr.	$= q$	$= q + dq$
orbitae inclinationem	$= n$	$= n + dn$

anomaliam mediam vero tabularem ad quoduis tempus augeri debere angulo $= dm$.

Ad tempus autem obſeruationis ſit

Ex tabulis non correctis		ex tabulis correctis
Anomalia media	$= x$	$= x + dx$
Anomalia excentri	$= v$	$= v + dv$
Diſtantia a ſole	$= y$	$= y + dy$
Anomalia vera	$= z$	$= z + dz$
Diſtantia aphelii a nodo	$= e$	$= e + de$
Longitudo planetae a nodo	$= r$	$= r + dr$
Longitudo heliocentrica planetae a prima ✳ ♈	$= f$	$= f + df$
Latitudo heliocentrica	$= g$	$= g + dg$

Erit autem vt ſupra vidimus:

$v = x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x -$ etc.$)$

$y = a(1 + k$ coſ. $v)$

coſ. $z \frac{a}{y}(k +$ coſ. $v)$ vel ſaepe commodius

$z = v - k$ ſin. $v + \frac{1}{4}k^2$ ſin. $2v - \frac{1}{12}k^3$ (ſin. $3v + 3$ ſin. $v) +$ etc.

tang. $e = \frac{\text{tang}\,(p-q)}{\text{coſ.}\,n}$

tang. $r =$ coſ. n tang. $(e + z)$

$f = q + r$

ſin. $g =$ ſin. n. ſin, $(e + z)$

Valores autem differentiales, qui ex correctionibus oriuntur ita ſe habebunt

$dx = dm$

$dv = \frac{adm}{y} - \frac{adk\,\text{ſin.}\,v}{y}$

$dy = adk$ coſ. $z - \frac{aakdm\,\text{ſin.}\,v}{y}$

$dz = \frac{adm\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} - \frac{adk\,\text{ſin.}\,z}{y} - \frac{dk\,\text{ſin.}\,z}{1-kk}$.

$de = \frac{(dp-dq)(\text{coſ.}\,e)^2}{\text{coſ.}\,n\,(\text{coſ.}\,(p-q))^2} + \frac{dn\,\text{tang.}\,n\,\text{tang.}\,(p-q)(\text{coſ.}\,e)^2}{\text{coſ.}\,n}$

$dr = \frac{(de+dz)\,\text{coſ.}\,n\,(\text{coſ.}\,r)^2}{(\text{coſ.}\,(e+z))^2} - dn$ ſin. n tang. $(e + z)(\text{coſ.}\,r)^2$

$df = dq + dr$

$dg = \frac{dn\,\text{coſ.}\,n\,\text{ſin.}\,(e+z)}{\text{coſ.}\,g} + \frac{(de+dz)\,\text{ſin.}\,n\,\text{coſ.}\,(e+z)}{\text{coſ.}\,g}$.

quae duae vltimae aequationes inferuient ad tabulas corrigendas; si tres accipiantur obseruationes; vt iam ostendimus.

§. 34. Quodsi nunc haec praecepta ad vsum accommodare velimus, necesse est vt ante omnia primam illam stellam arietis determinemus, quoniam ab ea non solum planetarum longitudines computamus, sed etiam aphelia eorum et nodos constantem distantiam seruare ponimus. Assumimus igitur initio anni 1701 longitudinem huius stellae ab aequinoctio fuisse 29°, 0′, 30″, quae siue vera sit eius longitudo siue secus, non multum curamus; ab hoc enim eclipticae puncto, siue stella quaedam eo referatur siue secus, cum longitudines planetarum, tum apheliorum et nodorum situs describemus. Praeterea aequinoctia quotannis 50″ regredi ponimus, ex quo ad praecipuas epochas sequens tabella longitudinem istius nostrae primae stellae arietis ab aequinoctio verno sumtam indicabit.

Anno Christi	Longitudo primae stellae arietis ab aequinoctio verno			
1	0 S,	5°,	23′,	50″
1601	0 ,	27 ,	37 ,	10
1621	0 ,	27 ,	53 ,	50
1641	0 ,	28 ,	10 ,	30
1661	0 ,	28 ,	27 ,	10
1681	0 ,	28 ,	43 ,	50
1701	0 ,	29 ,	0 ,	30
1721	0 ,	29 ,	17 ,	10
1741	0 ,	29 ,	33 ,	50
1761	0 ,	29 ,	50 ,	30

1781	1	0,	7,	10
1801	1	0,	23,	50
1821	1	0,	40,	30
1841	1	0,	57,	10
1861	1	1,	13,	50
1881	1	1,	30,	30
1901	1	1,	47,	10
1921	1	2,	3,	50
1941	1	2,	20,	30
1961	1	2,	37,	10
1981	1	2,	53,	50

Quantum autem aequinoctia dato tempore recedant, cognoſcetur ex hac tabula

Anni	Praeceſſio aequin.		Anni	Praeceſſio aequin.			
1	0′,	50″	20	0 S,	0°,	16′,	40″
2	1,	40	40	0	0,	33,	20
3	2,	30	60	0	0,	50,	0
4	3,	20	80	0	1,	6,	40
5	4,	10	100	0	1,	23,	20
6	5,	0	200	0	2,	46,	40
7	5,	50	300	0	4,	10,	0
8	6,	40	400	0	5,	33,	20
9	7,	30	500	0	6,	56,	40
10	8,	20	600	0	8,	20,	0
11	9,	10	700	0	9,	43,	20
12	10,	0	800	0	11,	6,	40
13	10,	50	900	0	12,	30,	0
14	11,	40	1000	0	13,	53,	20
15	12,	30	2000	0	27,	46,	40

Anni	Praeceſſio aequin.		Anni	Praeceſſio aequin.
16	13′,	20″	3000	1 S, 11°, 40′ 0″
17	14,	10	4000	1 , 25 , 33 , 20
18	15,	0	5000	2 , 9 , 26 , 40
19	15,	50		
20	16,	40		

Ex hac igitur tabula ad quoduis tempus diſtantia aequinoctii verni ab hac prima ſtella arietis poterit aſſignari; id quod omnino neceſſe eſt, cum in obſeruationibus longitudines planetarum ab aequinoctio verno ſoleant exhiberi.

§. 35. His praemiſſis, quia ad theoriam motus planetarum ſingulorum emendandam ante omnia accurata tabula pro motu ſolis requiritur; methodum noſtram primum ad tabulas ſolares corrigendas accommodare iuuabit. Tabulae autem, quarum correctionem ſuſcipimus ad obſeruatorium Greenwicenſe et ſtilum veterem ſunt accommodatae, eaeque ponunt longitudinem aphelii orbitae terrae heliocentricam ab aſſumta prima ſtella arietis $= 8$ S, $8°, 39', 40''$, atque excentricitatem orbitae terrae $= \frac{1700}{100000}$; diſtantiam terrae a ſole mediam $= 100000$: vnde erit ex his tabulis $a = 100000$; $k = \frac{17}{1000}$ et $p = 248°, 39', 40''$.

Anomaliam autem mediam eaedem tabulae oſtendunt pro praecipuis epochis, vt ſequitur.

Initio anni	Anomalia media terrae
1601	6 S, 13°, 41′, 40″
1621	6 , 13 , 34 , 4
1641	6 , 13 , 26 , 28
1661	6 , 13 , 18 , 52

Hae anomaliae referendae ſunt ad meridiem diei poſtremi anni cuiusque praeteriti.

Initio

Initio anni	Anomalia media terrae
1681	6 , 13 , 11 , 16
1701	6 , 13 , 3 , 40
1721	6 , 12 , 56 , 4
1741	6 , 12 , 48 , 28
1761	6 , 12 , 40 , 52
1781	6 , 12 , 33 , 16
1801	6 , 12 , 25 , 41

Pro annis vero ſingulis Iulianis anomalia media augetur vt ſequens tabella indicat.

Anni Iuliani expanſi	Anomalia media Terrae
1	11 S, 29°, 44′, 50″
2	11 , 29 , 29 , 40
3	11 , 29 , 14 , 30
4	11 , 29 , 58 , 28
5	11 , 29 , 43 , 18
6	11 , 29 , 28 , 8
7	11 , 29 , 12 , 58
8	11 , 29 , 56 , 56
9	11 , 29 , 41 , 46
10	11 , 29 , 26 , 37
11	11 , 29 , 11 , 27
12	11 , 29 , 55 , 26
13	11 , 29 , 40 , 16
14	11 , 29 , 25 , 6
15	11 , 29 , 9 , 56
16	11 , 29 , 53 , 54
17	11 , 29 , 38 , 44
18	11 , 29 , 23 , 34
19	11 , 29 , 8 , 24
20	11 , 29 , 52 , 24

Multa-

Mutationes autem anomaliae mediae, quae singulis anni partibus respondent ex tabulis desumere licet.

§. 36. Proposita nobis primum sit ista obseruatio Greenouici instituta, qua A. 1690 Martii die 7, 12^h, $8'$, $24''$, tempore medio longitudo solis ab aequinoctio obseruata fuit.

11 S, $27°$, $21'$, $27''$. Ob propagationem lucis autem haec longitudo obseruata augeri debeat $20''$, ita vt sol, si lux in instanti propagaretur, eo tempore visus fuisset in longitudine 11 S, $27°$, $21'$, $47''$. Pro hoc nunc tempore quaeratur longitudo primae stellae arietis, ita

1681	0^s, $28°$, $43'$, $50''$
9	$7'$, $30''$
1690	0, $28°$, $51'$, $20''$
Mart. 7	9
Subtrahatur	0, 28, 51, 29
ab	11, 27, 21, 47
	10, 28, 30, 18

quae est longitudo solis a prima stella arietis sumta vnde longitudo terrae ex sole visa hoc tempore fuit F = 4 S, $28°$, $30'$, $18''$. Quaeratur nunc pro hoc tempore anomalia terrae vel solis media, quod tempus astronomice expressum est 1690 Mart. 7 d. 0 h, $8'$, $24''$

Anni	Anomalia media terrae
1681	6S, $13°$, $11'$, $16''$
9	11, 29, 41, 46
Mart. d. 7	2, 5, 3, 1
$8'$	20
$24''$	1
	8S, 17, 56, 24

§. 37.

§. 37. Ad computum ergo inſtituendum erit $x = 257^\circ, 56', 24''$; et ſin. $x = -$ ſin. $77^\circ, 56', 24''$. Sinus autem in arcum commutatur, ſi a logarithmo ſinus ſubtrahatur 4, 6855749, numerus enim reſiduo logarithmo reſpondens dabit arcum in minutis ſecundis expreſſum: at quia ſinus inſuper per $k = \frac{17}{1000}$ debent multiplicari inſuper ſubtrahi debet $l\frac{1000}{17} = 1, 7695510$; a logarithmo ſinus ad anomaliam excentri v inueniendam, omnino ſubtrahi debet iſte logarithmus 6, 4551259. Cum igitur ſit $v = x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x - k$ ſin. $(x -$ etc. calculus ita inſtitui debet.

l ſin. $x = 9, 9902967$
ſubtrahatur 6, 4551259

3, 5351708
numerus $3429''$ ſeu $57'\ 9'' = -k$ ſin. x
$257^\circ, 56, 24 = x$ addatur

$258^\circ, 53', 33'' = x - k$ ſin. x
180

$78^\circ, 53', 33''$

l ſin. 9, 9917737
ſubtr. 6, 4551259

3, 5366478
numerus $3441''$ ſeu $57', 21''$
$257^\circ, 56', 24$ addatur x

$258^\circ, 53', 45''$
180°

$78^\circ, 53', 45''$

l sin. 9, 9917737
subtr. 6, 4551259

3, 5360478
numerus 3441″ seu 57′, 21″
257° 56′, 24

$v =$ 258°, 53′, 45″

§ 38. Hinc quaeratur distantia terrae a sole $y = a + k a$ cos. v. Est vero cos. $v = -$ cos. 78°, 53′, 45″ vnde
l cos. 78°, 53′; 45″ = 9, 2846411
$l a k$ = 3, 2304489

2, 5150900
ergo $k a$ cos. $v = -327$
addatur a = 100000

$y =$ 99672 et $l y = 4, 9985732$
Quoniam vero posita anomalia vera $= z$ est cos. $z = \frac{a k \text{ sin. tot.}}{y} + \frac{a \text{ cos. } v}{y}$, calculus ita se habebit:
$l a k$ sin. tot. = 13, 2304489
$l y$ = 4, 9985732

8, 2318757
numerus ex tabula sinuum 170559
l cos v = 9, 2846411
$l a$ = 5, 0000000

14, 2846411
subtr. $l y$ = 4, 9985732

9, 2860679

numerus

numerus ex tabulis ſinuum $1932270 = -\frac{a\cos.v}{y}$
ſubtr. 170559

-1761711

At numerus 1761711 eſt ſinus anguli huius
$10^\circ, 8', 48''$ qui ſubtractus a tribus rectis
270°

dat $259^\circ, 51', 12''$ pro anomalia vera z. ergo

$$z = 8\,S, 19^\circ, 51', 12''$$ addatur
$$p = 8\,, 8\,, 39\,, 40''$$

$$f = 4\,S.\,28^\circ, 30', 52''$$

haecque eſt longitudo terrae ex tabulis inuenta a prima ſtella arietis computata. Quare cum ſit

$F = 4\,S, 28^\circ, 30', 18''$ et
$f = 4\,S, 28^\circ, 30', 52''$ erit $F - f =$
$df = -34''$.

§. 39. Quoniam vero eſt $df = dp + \frac{adm\,ſin.z}{y\,ſin.v} - \frac{adk\,ſin.z}{y} - \frac{dk\,ſi.z}{(1-kk)}$ haec aequatio ad noſtram obſeruationem ſequenti modo accommodabitur. Eſt ſin. $z =$ $-$ ſin. $79^\circ, 51', 12''$; ſin. $v = -$ ſin. $78^\circ, 53', 45''$ et $l\frac{1}{1-kk} = l\frac{1000000}{983 \cdot 1017} = 0,0001254$. Hinc fiat
l ſin. $z = 9,9931539$ negatio vero poſtea in
l ſin. $v = 9,9917924$ computum duci debet.
$l\frac{a}{y} = 0,0014267$
vnde valor ipſius df ſequenti modo definietur

$$l\ ſin.\ z = 9,9931539$$
$$l\ \frac{a}{y} = 0,0014267$$

$$9,\ 9945806 = l\,\frac{-a\,sin.\,z}{y}$$
$$l\,sin.\ v = \underline{9,\ 9917924}$$
$$0,\ 0027882$$
numerus respondens $= 1,\ 0064 = \frac{a\,sin.\,z}{y\,sin.\,v}$
$$l\,\frac{-a\,sin.\,z}{y} = 9,\ 9945806$$
$$l\,sin.\,tot. = \underline{10,\ 0000000}$$
$$(-1),9945806$$
numerus respondens $= 0,\ 9876 = \frac{-a\,sin.\,z}{y\,sin.\,tot.}$
$$l\,sin.\ z = 9,\ 9931539$$
$$l\,\frac{1}{1-kk} = \underline{0,\ 0001254}$$
$$9,\ 9932793$$
$$l\,sin.\,tot. = \underline{10,\ 0000000}$$
$$(-1),9932793$$
numerus respondens $= 0,\ 9846 = \frac{-sin.\,z}{1-kk}$
Ex his erit $df = -34'' = dp + 1,0064\,dm + 1,9722\,dk.$ $(406795''.\,dk)$

§. 40. Sumamus aliam obseruationem solis etiam Grenouici factam Anno 1690, M. Sept. d. 15, 11 h, 51′, 27″ tempore medio, seu astronomico more Anno 1690, d. 14. Sept. 23 h, 51′, 27″, quo tempore solis longitudo ab aequinoctio verno obseruata fuit 6 S, 2°, 45′, 37″, quae ob lucis propagationem 20″ aucta fit 6 S, 2°, 45′, 57″. Ad hoc tempus longitudo primae stellae arietis quaeratur

	Longitudo primae stellae Arietis
A. 1690	0 S, 28°, 51′, 20″
14 Sept.	35

subtra-

ſubtrahatur	0 S, 28°, 51′, 55″
ab	6 S, 2°, 45′, 57″
	5 S, 3°, 54′, 2″

quae eſt longitudo ſolis a prima ſtella arietis ſumta vnde longitudo terrae ex ſole viſa erat F = 11 S, 3°, 54′, 2″. Quaeratur nunc pro hoc tempore anomalia media ſolis vel terrae:

	Anomalia Terrae media
A. 1690	6 S, 12°, 53′, 2″
d. 14. Sept.	8 S, 13, 18, 6
23 *h.*	56, 40
51′	2, 6
27″	1
	2 S, 27°, 9′, 55″

vnde erit anomalia media $x = 87°, 9', 55''$

§. 41. Ad anomaliam excentri inueniendam iterum a logarithmis ſinuum ſubtrahi debet iſte logarithmus 6, 4551259, eritque calculus vt ſequitur.

l ſin. $x =$	9, 9994683
ſubtr.	6, 4551259
	3, 5443424

numerus 3502″ = 58′, 22″ = *k ſin.* x ſubtrahatur

87°, 9′, 55″	ab x
86°, 11′, 33″	$= x - k$ *ſin.* x

l ſin. =	9, 9990402
	6, 4551259
	3, 5439143

 nume-

numerus $= 3499'' = 58', 19''$ fubtrahatur

ab $87°, 9', 55''$

$86°, 11', 36''$

$l\,\mathit{fin.} = 9,9990405$

$6,4551259$

$3,5439146$

numerus $= 3499'' = 58', 19''$

ab $x = 87°, 9', 55''$

$v = 86°, 11', 36''$

Cum nunc fit diftantia Terrae *a* fole $y = a + k\,a\,\mathit{cof.}\,v$ fiat $l\,\mathit{cof.}\,86°, 11', 36'' = 8,8221016$

$l\,a\,k = 3,2304489$

$12,0525505$

ergo $k\,a\,\mathit{cof.}\,v = 113$

addatur $a = 100000$

$y = 100113$ et $ly = 5,0004905$

Quoniam porro ad anomaliam veram *z* inueniendam eft $\mathit{cof.}\,z = \frac{ak\,\mathit{fin.\,tob}}{y} + \frac{a\,\cos.\,v}{y}$ fiat

$l\,ak\,\mathit{fin.tot.} = 13,2304489$

$ly = 5,0004905$

$8,2299584$

numerus ex tabula finuum 169808

$l\,\mathit{cof.}\,v = 8,8221016$

$l\,a = 5,0000000$

$13,8221016$

$ly = 5,0004905$

$8,8216111$

numerus ex tabula ſinuum $= 663149$
169808

$cos\, z = 832957$

ergo $z = 85°, 13', 20''$

ſeu anomalia vera $z = 2\,S, 25°, 13', 20''$
addatur $p = 8, 8, 39, 40$

long. terrae $f = 11\,S, 3°, 53', 0''$
at eſt $F = 11\,S, 3, 54, 2$

ergo $F - f = df = 62''$.

§. 42. Quoniam vero eſt $df = dp + \frac{adm\, fin.\, z}{y\, fin.\, v} - \frac{adk\, fin.\, z}{y} - \frac{dk\, fin.\, z}{1 - kk}$, atque df, dp et dm arcus denotant in ſecundis exprimendos, dk vero ſit numerus abſolutus, eius coefficientes in arcus transformari atque in minutis ſecundis exprimi debent, quod fit ſi a logarithmis ſinuum ſubtrahatur 4, 6855749; reſiduorum enim logarithmorum numeri reſpondentes dabunt arcus in minutis ſecundis expreſſos; quam reductionem etiam in prima obſeruatione adhibuimus.

$l\, fin.\, z = 9,9984883$
$l\, a = 5,0000000$

$l\, a\, fin.\, z = 14,9984883$

$l\, fin.\, v = 9,9990408$
$l\, y = 5,0004905$

$14,9995313$

$l \frac{a\, fin.\, z}{y\, fin.\, v} = (-1)\, 9989570$

ergo $\frac{a\, fin.\, z}{y\, fin.\, v} = 0,9976$

a

$$
\begin{array}{rl}
l\,a\,\text{fin.}\,z = & 14,9984883 \\
l\,y \;\;= & 5,0004905 \\ \hline
 & 9,9979978 \\
 & 4,6855749 \\ \hline
 & 5,3124229
\end{array}
$$

ergo $\frac{a\,\text{fin.}\,z}{y} = 205316''$

Porro $l\,\text{fin.}\,z = 9,9984883$

$$
\begin{array}{rl}
l\,\frac{1}{1-kk} = & 0,0001254 \\ \hline
 & 9,9986137 \\
 & 4,6855749 \\ \hline
 & 5,3130388
\end{array}
$$

ergo $\frac{\text{fin.}\,z}{1-kk} = 205607''$

$$
\begin{array}{r}
205316 \\ \hline
\end{array}
$$

$\frac{a\,\text{fin.}\,z}{y} + \frac{\text{fin.}\,z}{1-kk} = 410923''$

Ergo $df = 62'' = dp + 0,9976.\,dm - 410923''.\,dk$

§. 43. Pro tertia obſeruatione aſſumamus talem, quae cum alio loco, tum tempore aliquantum remoto ſit facta. Pariſiis nimirum A. 1716 Maii d. 12., $11^h\ 55',\ 53''$, tempore medio ſtili noui locus ſolis ab aequinoctio diſtare deprehenſus eſt 1 S, $21°,\ 44',\ 35''$, quae longitudo ob lucis propagationem $20''$ aucta fit 1 S $21°,\ 44',\ 55''$. Tempus autem obſeruationis ad ſtilum veterem reductum eſt A. 1716 Maii d. 1, $11^h,\ 55',\ 53''$. Deinde quia Lutetia Pariſiorum $9'$ temp. orientalior eſt quam Londinum, hoc tempus Londini erat A. 1716 Maii d. 1, 11^h, $46',\ 53''$ tempore ciuili, quod ſecundum tempus Aſtronominomicum dat A. 1716 Apr. 30 d. $23^h, 46', 53''$; at quia hic annus est bissextilis, dies adiici debet ita vt habeatur A. 1716 Maii 1 d. $23^h, 46', 53''$. Ad hoc igitur tempus primum longitudo primae stellae arietis supputetur,

Longitudo primae stellae arietis

A. 1701	0 S, 29°, 0′, 30″
— — 15	12′, 30″
Mai. 1 d.	17″
subtrahatur ab	0 S, 29°, 13′, 17″
	1 S, 21°, 44′, 55″
	0 S, 22°, 31′, 38″

quae est longitudo solis a prima stella arietis; vnde longitudo terrae ex sole visa ab eadem prima stella arietis erit $F = 6\,S, 22°, 31', 38''$.

§. 44. Quaeratur nunc ad hoc tempus solis vel terrae anomalia media ex tabulis assumtis.

Anomalia media terrae

A. 1701	6S, 13°, 3′, 40″
Anni. 15	11, 29, 9, 56
Mai. 1 d.	3, 29, 15, 31
23 h.	56, 40
46′	1, 53
53″	 2
	10S, 12°, 27′, 42″

Erit ergo $x = 312°, 27', 42''$ et $\sin. x = -\sin. 47°, 32', 18''$

quire calculus ad anomaliam excentri v inueniendam instituetur vt supra §. 37;

l-fin. $x = 9, 8678950$
fubtr. $6, 4551259$

$3, 4127691$

numerus $2587'' = 43', 7'' = -k$ fin. x

$x = 312°, 27', 42''$ addatur

$313°, 10, 49''$ a
$360°$ fubtr.

$46°, 49', 11''$

l fin. $= 9, 8628490$
$6, 4551259$

$3, 4077231$

numerus $2557'', 42', 37''$

$x = 312°, 27', 42''$

$313°, 10', 19''$
360

$46°, 49', 41''$

l fin. $= 9, 8629065$
$6, 4551259$

$3, 4077806$

numerus; $2557'' = 42', 37''$

$x = 312°, 27', 42''$

$v = 313°, 10', 19''$

§. 45. Diftantia Solis a terra $y = a + ka \cos. v$ ita reperietur cof. $v =$ cof. $46°, 49', 41'' =$ fin. $43°, 10', 19''$
l cof.

$$
\begin{array}{rl}
l\cos. v = & 9,\ 8351791 \\
l\,a\,k = & 3,\ 2304489 \\
\hline
l k a \cos. v = & 3,\ 0656280 \\
\text{ergo } k a \cos. v = & 1163 \\
a = & 100000 \\
\hline
y = & 101163 \text{ et } l y = 5,\ 0050216
\end{array}
$$

Porro est cosinus anomaliae verae $z = \frac{ak\,\text{sin.tot.}}{y} + \frac{a\cos. v}{y}$

$$
\begin{array}{rl}
l a k \text{ sin. tot.} = & 13,\ 2304489 \\
l y = & 5,\ 0050216 \\
\hline
& 8,\ 2254273
\end{array}
$$

numerus ex tabulis sinuum $= 168046$

$$
\begin{array}{rl}
l a \cos. v = & 14,\ 8351791 \\
l y = & 5,\ 0050216 \\
\hline
& 9,\ 8301575
\end{array}
$$

numerus ex tabulis sinuum $= 6763284$

$$
\begin{array}{r}
168046 \\
\hline
\cos. z = 6931330
\end{array}
$$

qui est sin. $43^\circ,\ 52',\ 43''$ addantur tres recti

$$
\begin{array}{rl}
 & 270^\circ \\
\hline
z = & 313^\circ,\ 52',\ 43'' \text{ seu} \\
z = & 10S,\ 13^\circ,\ 52',\ 43'' \\
p = & 8,\ 8,\ 39',\ 40 \\
\hline
f = & 6S,\ 22^\circ,\ 32',\ 23'' \\
F = & 6S,\ 22^\circ,\ 31',\ 38'' \\
\hline
\end{array}
$$

$F - f = df = -45''$

§. 46. Cum nunc sit $df = dp + \frac{a\,dm\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} - dk$ $\left(\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} + \frac{\text{ſin.}\,z}{1-kk}\right)$ inſtituatur ſequens calculus; exiſtente ſin $z = -$ ſin. 46°, 7′, 17″ et ſin. $v = -$ ſin 46°, 49′, 41″.

$$
\begin{array}{rl}
l - \text{ſin.}\, z = & 9,\ 8578207 \\
l\,\frac{y}{a} = & 0,\ 0050216 \\
\hline
 & 9,\ 8527991 \\
l - \text{ſin.}\, v = & 9,\ 8629065 \\
\hline
 & (-1),\ 9898926 \\
\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y\,\text{ſin.}\,v} = & 0,\ 97700
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
l - \text{ſin.}\, z = & 9,\ 8578207 \\
l\,\frac{y}{a} = & 0,\ 0050216 \\
\hline
 & 9,\ 8527991 \\
 & 4,\ 6855749 \\
\hline
 & 5,\ 1672242 \\
-\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} = & 146969'' \\
l - \text{ſin.}\, z = & 9,\ 8578207 \\
l\,\frac{1}{1-kk} = & 0,\ 0001254 \\
\hline
 & 9,\ 8579461 \\
 & 4,\ 6855749 \\
\hline
 & 5,\ 1723712 \\
-\frac{\text{ſin.}\,z}{1-kk} = & 148721'' \\
 & 146969 \\
\hline
 & 295690'' = -\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} - \frac{\text{ſin.}\,z}{1-kk}.
\end{array}
$$

Quare erit $df = -45'' = dp + 0,97700\,dm + 295690''.\,dk$

§. 47.

§. 47. Ex his tribus aequationibus nacti sumus ad tabulas solares assumtas corrigendas tres sequentes aequationes.

$$\text{I.} \quad -34'' = dp + 1.0064\, dm + 406795''.\, dk$$
$$\text{II.} \quad 62'' = dp + 0,9976\, dm - 410923''.\, dk$$
$$\text{III.} \quad -45'' = dp + 0;9770\, dm + 295690''.\, dk$$

quae praebent eliminato dp has duas

$$-96'' = 0,0088\, dm + 817718''.\, dk \,|\; \text{per. } 10$$
$$+11'' = 0,0294\, dm + 111105''.\, dk \,|\; \text{per. } 3.$$

hincque $-993'' = 7843865''.\, dk$ ex quo reperitur $dk = \frac{-993}{7843865} = \frac{-126}{1000000}$. Cum igitur excentricitas k posita esset $= \frac{17}{1000} = \frac{17000}{1000000}$ erit excentricitas vera $k + dk = \frac{16873}{1000000}$. Porro quia est $dk = \frac{-126}{1000000}$ erit $11'' = 0,0294\, dm - 14''$. seu $dm = \frac{250000''}{294} = 14', 10'' = 850''$. Ex quo anomaliae mediae tabularum ad quoduis tempus augeri debent angulo $14', 10''$. His autem valoribus loco dk et dm substitutis inuenitur $dp = -838'' = -13', 58''$. Quare cum aphelii orbitae terrae longitudo a prima stella arietis in tabulis sit posita $p = 8\,S, 8°, 39', 40''$ erit vera aphelii longitudo $p + dp = 8\,S, 8°, 25', 42''$. Cum ergo longitudo primae stellae arietis ab aequinoctio verno Anni 1701 initio esset $0\,S, 29°, 0', 30''$, fuit hoc tempore aphelii terrae ab aequinoctio verno longitudo $= 9\,S, 7°, 26', 12''$, hinc apogaei solis eo tempore longitudo ab aequinoctio $= 3\,S, 7°, 26', 12''$. Haeque correctiones satis propre conueniunt cum iis, quas in Tomo VII. Comment. altera methodo vsus exhibui. Tabulae autem solares hoc modo correctae non ad quoduis tempus solis locum ostendunt, in quo reuera conspicietur,

 sed,

ſed in quo conſpicuus foret, ſi lumen in inſtanti ad nos pertingeret: quamobrem a loco ſolis ex his tabulis correctis eruto perpetuo ſubtrahi oportet 20″, vt locus apparens obtineatur.

§. 48. En igitur tabulas ſolares, quibus terra in orbita ſua circa ſolem mouetur, maxime exactas, ſi quidem obſeruationes, quibus ſum vſus, ſint ſumma cura inſtitutae. Eſt igitur, a prima noſtra ſtella arietis longitudines computando, aphelii terrae longitudo conſtans $= 8\,S, 8°, 25', 42''$. Deinde orbitae terrae excentricitas ſeu diſtantia ſolis a centro ellipſis terrenae $= \frac{16873}{1000000}$, ita vt ſit diſtantia terrae a ſole media ad ſolis a centro orbitae diſtantiam vt 1000000 ad 16873. Hinc inuenitur per regulam Tomo VII. Comment. p. 98 datam maxima aequatio hoc modo

$$\begin{array}{rl} & 5,\ 6154596 \\ l\ 16873 = & 4,\ 2271923 \\ \hline & 3,\ 8426519 \text{ demto } l\ 1000000 \end{array}$$

Ergo aequatio maxima eſt $6961'' = 1°, 56', 1''$

Tabulae autem anomaliarum mediarum ad praecipuas epochas ſequentes, vbi ſemper eae reſpondent meridiei poſtremi diei anni eum, quem tabulae monſtrant, praecedentis, pro obſeruatorio Londinenſi ſeu potius Grenouicenſi ita ſe habebunt

A. C.	Anomalia terrae media			
1601	6 S,	13°,	55′,	50″
1621	6,	13,	48,	14
1641	6,	13,	40,	38
1661	6,	13,	33,	2

A.

A. C.	Anomalia terrae media			
1681	6 S,	13°,	25′,	26″
1701	6,	13,	17,	50
1721	6,	13,	10,	14
1741	6,	13,	2,	38
1761	6,	12,	55,	2
1781	6,	12,	47,	26
1801	6,	12,	39,	51

Tabula vero pro mutatione anomaliae pro dato annorum numero, et pro datis anni partibus manet vt ante, cum ea, quia tempore periodico terrae in orbita ſua nititur, correctione non egeat. Ex his igitur tabulis correctis ad quoduis tempus locum ſolis in ecliptica exactiſſime aſſignare licebit, qui tutiſſime in inueſtigandis reliquorum planetarum locis adhiberi poterit.

§. 49. Orbita terrae nunc ſtabilita pergo ad vſum huius methodi monſtrandum in orbita cuiuscunque planetae per loca Geocentrica determinanda. Eligo autem ad hoc ex planetis Mercurium potiſſimum, cum quod eius loca heliocentrica rariſſime obſeruare licet, tum quod tabulae aſtronomicae pro hoc planeta maxime differunt, ideoque correctione prae ceteris indigent. Tabulas autem hic eas corrigendas ſuſcipio, quae lexico Technico Harriſii ſunt inſertae, atque ad obſeruatorium Londinenſe accommodatae. Statuitur autem in his tabulis

Diſtantia mercurii media a ſole $a = 38710$

exiſtente terrae diſtantia media $= 100000$

Diſtantia ſolis a centro orbitae Mercurii $= 7970$

Vnde excentricitas $k = \frac{797}{3871} = \frac{205889}{1000000}$

atque

atque a prima stella arietis statuitur
Longitudo aphelii $p = 7\,S,\ 13^\circ,\ 48'$
Longitudo nodi asc. $q = 0\,S,\ 15^\circ,\ 42'$
Inclinatio orbitae ad eclipticam $n = 6^\circ,\ 54'$

Anomaliae mediae autem ad quoduis tempus in iis tabulis exhibentur, quas huc transscribere non est opus, cum vero fuerint correctae, eas hic indicabo. Pono autem ad quoduis tempus anomaliam mediam, quam hae tabulae monstrant, augeri debere angulo dm; excentricitatem k vero fractione dk, longitudinem aphelii p arculo dp, longitudinem nodi q arculo dq atque inclinationem orbitae n angulo dn augendam esse; quas correctiones quinque ex tribus sequentibus obseruationibus deducam.

§. 50. Tres istae obseruationes, quibus in hoc negotio vti visum est, institutae sunt Parisiis, atque tam longitudo quam latitudo mercurii geocentrica ad tempora terna notata obseruata est vt sequitur.

Tempore apparente stili noui	Longitudo ☿	Latitudo
A. 1715 Mai. 20 d. $22^h\,39'$	$1S, 8^\circ, 36', 0''$	$2^\circ, 23', 55''$ Austr.
A. 1716 Aug. 18 d. $22^h\,51'$	$4S, 8^\circ, 56', 30''$	$0^\circ, 13', 30''$ Bor.
A. 1717 Mai. 6 d. $23^h\,48'$	$1S, 13^\circ, 42', 20''$	$0^\circ, 18', 30''$ Austr.

Tempora autem haec triplici correctione opus habent, primum scilicet a stilo nouo ad veterem debent reduci, deinde ad meridianum Londinensem transferri; ac tertio, quia sunt tempora apparentia, in media transformari debent. Hoc facto tempore medio Londinensi obseruationes ita se habebunt

A. 1715

	Longitudo ☿	Latitudo
A. 1715 Mai. 9d. 22h, 25′, 55″	1S, 8°, 36′, 0″	2°, 23, 55″ Austr.
A. 1716 Aug. 7d. 22h, 45′ 6″	4S, 8°, 56′, 30″	0°, 13, 30 Bor.
A. 1717 Apr. 25d. 23h, 35′, 7″	1S, 13°, 42′, 20″	0°, 18, 30 Austr.

Longitudines mercurii autem hae ab aequinoctio verno sunt computatae, quae ideo ad primam stellam arietis sunt reducendae: facta autem hac reductione obseruationes ita se habebunt.

Tempus medium	Long. ☿ a 1 * ♈	Latitudo
A. 1715 Mai. 9 d. 22 h. 25′, 55″	0 S, 9°, 23′, 32″	2°, 23′, 55″ Austr.
A. 1716 Aug. 7 d. 22 h. 45′, 6″	3 S, 9°, 43′, 0″	0°, 13′, 30″ Bor.
A. 1717. Apr. 25 d. 23 h. 35′, 7″	0 S, 14°, 28′, 14″	0°, 18′, 30″ Austr.

Hae longitudines obseruatae porro correctione opus habent ex lucis propagatione orta, ad quam inueniendam oportet, vt ad singula obseruationum tempora loca terrae in orbita sua supputemus; quae loca vna cum distantiis terrae a sole his temporibus necessaria sunt, ad loca mercurii geocentrica ex tabulis computanda.

§. 51. Ad tempus igitur primae obseruationis locus terrae in sua orbita, seu eius longitudo heliocentrica a prima stella arietis sequenti calculo ex tabulis nostris correctis eruetur.

Anno	Anomalia media terrae
1701	6S, 13°, 17′, 50″
14 A.	11, 29, 25, 6
Mai. 9 d.	4, 7, 8, 36
22 h.	54, 13
25′, 55″	1, 4
	10S, 20°, 46′, 59″

Calculus ergo instituatur vt supra: eritque anomalia media terrae $x = 320°, 46', 59''$. ex qua anomalia excentri inuenietur $v = x - k$ sin. $(x - k$ sin. $(x - k$ sin. $(v$ etc. at est $lk = (-2), 2271923$ et $l\frac{1}{k} = 1, 7728076$. ex quo a logarithmis sinuum, vt ii in arcus conuertantur subtrahi debet $\quad 1, 7728076$

$$\underline{+\ 4, 6855749}$$

hic logarithmus. $6, 4583825$

Atqui est sin. $x = -$ sin $39°, 13', 1''$

$l -$ sin. $x \quad = 9, 8008947$

subtr. $\quad \underline{6, 4583825}$

$3, 3425122$

numerus. $2201'' = 36', 41'' = -k$ sin. x

$x = \quad \underline{320°, 46', 59''} \quad$ addatur

$321°, 23', 40'' \quad$ subtr.

ab $\quad \underline{360}$

$38°, 36', 20''$

l sin. $\quad = 9, 7951536$

$\underline{6, 4583825}$

$3, 3367711$

numerus $2171'' = 36', 11''$ addatur ad

$x = \quad \underline{320°, 46', 59''}$

$v = \quad 321°, 23', 10''$ anomalia excentri.

Hinc reperitur distantia terrae a sole $y = a + ka$ cos. v existente $a = 100000$ et cos. $v =$ sin. $51° 23', 10''$.

lka

$$lka = 3,2271923$$
$$l\,\text{cof.}\,v = \underline{9,8928563}$$
$$3,1200486$$

numerus $= 1318$

Ergo diftantia terrae a fole $y = 101318$

et $ly = 5,0056867$.

Anomalia vera z commodiffime reperietur ex hac aequatione $z = v - k\,\text{fin.}\,v + \frac{1}{4}k^2\,\text{fin.}\,2\,v$. vbi eft

$\text{fin.}\,v = -\,\text{fin.}\,38^\circ, 36', 50''$

$\text{fin.}\,2\,v = -\,\text{fin.}\,57^\circ, 13', 40''$

$l\frac{1}{4}k = -\;2,3748676$.

Calculus ergo ita inftituetur:

$$l - \text{fin.}\,v = 9,7952327$$
$$\underline{6,4583825}$$
$$3,3368502$$

$-\,k\,\text{fin.}\,v = 2172'' = 36', 12''$

$$l - \text{fin.}\,2\,v = 9,9246535$$
$$\underline{6,4583825}$$
$$3,4662710$$
$$l\frac{1}{4}k = -\;\underline{2,3748676}$$
$$1,0914034$$

$-\,\frac{1}{4}k^2\,\text{fin.}\,2\,v = 12''$.

Ergo $z = v + 36' = 321^\circ, 59', 10''$

feu $z \quad = \quad 10S, 21^\circ, 59', 10''$

addatur $p \quad = \quad \underline{8S, \;8^\circ, 25', 42''}$

longit. terrae $= \quad 7S, \;0^\circ, 24', 52''$

a prima ftella arietis computata.

§ 52. Instituatur simili modo inuestigatio longitudinis terrae tempore secundae obseruationis, qui annus cum sit bissextilis pro Aug. d. 7 sumi debet d. 8.

Anno	Anomalia media
1701	6 S, 13°, 17′, 50″
15	11, 29, 9, 56
Aug. 8 d.	7, 6, 50, 2
22 h	54, 13
45′, 6″	1, 51
	1 S, 20°, 13′, 52″

Ergo anomalia media terrae $x = 50°, 13', 52''$

l sin. x = 9, 8857300
6, 4583825
———
3, 4273475

k sin. x = 2675″ = 44′, 35″ subtrahatur
ab x = 50°, 13′, 52″
———
49°, 29′, 17″

l sin. = 9, 8809376
6, 4583825
———
3, 4225551

numerus = 2646″ = 44′, 6″ subtrahatur
ab x = 50°, 13′, 52″
———
v = 49°, 29′, 46″

l cos. v = 9, 8125789
lka = 3, 2271923
———
3, 0397712

numerus = 1096

Ergo

Ergo diſtantia terrae a ſole $y = 101096$

atque $ly = 5,0047340$

Nunc l ſin $v = 9,8810206$

$6,4583825$

$3,4226381$

k ſin. $v = 2646'' = 44', 6''$

$2v = 98°, 59', 32''$

ſin. $2v =$ coſ. $8°, 59', 32''$

l ſin. $2v = 9,9946400$

$6,4583825$

$3,5362575$

$l\frac{1}{4}k = -2,3748676$

$1,1613899$

$\frac{1}{4}k^2 \, \mathit{ſin.} \, 2v = 14''$

Ergo $z = v - 43', 52'' = 48°, 45', 54''$

Ergo anomalia terrae vera $= 1\,S, 18°, 45', 54''$

longitudo aphelii $p = 8, 8, 25, 42$

longitudo terrae a 1 * ♈ $= 9\,S, 27°, 11', 36''$

§. 53. Peruenimus tandem ad tertiam obſeruationem, ad quam locus terrae ſequenti modo reperietur.

Anno	Anomalia media terrae
1701	6 S, 13°, 17', 50''
16 A.	11, 29, 53, 54
Apr. 25. d.	3, 23, 20, 42
23 h.	56, 40
35', 7''	1, 27
	10 S, 7°, 30', 33''

Ergo anomalia media $x = 307^\circ, 30', 33''$
et fin. $x = -$ fin. $52^\circ, 29', 27''$

$$
\begin{array}{rl}
l - \text{fin.}\, x = & 9,\ 8993697 \\
 & 6,\ 4583825 \\
\hline
 & 3,\ 4409872 \\
-k\,\text{fin.}\, x = & 2760'' = 46',\ 0'' \\
x = & 307^\circ,\ 30',\ 33'' \\
\hline
 & 308^\circ,\ 16',\ 33''\ \text{ab} \\
 & 360 \\
\hline
 & 51^\circ,\ 43',\ 27'' \\
l\,\text{fin.} = & 9,\ 8948900 \\
 & 6,\ 4583825 \\
\hline
 & 3,\ 4365075 \\
\text{numerus} = & 2732'' = 45',\ 32'' \\
x = & 307^\circ,\ 30',\ 23'' \\
\hline
v = & 308^\circ,\ 16',\ 5'' \\
\text{cof.}\, v = & \text{fin.}\ 38^\circ,\ 16',\ 5'' \\
l\,\text{cof}\, v = & 9,\ 7919200 \\
l\,k\,a = & 3,\ 2271923 \\
\hline
 & 3,\ 0191123
\end{array}
$$

$k\,a$ cof. $v = 1045$
Ergo diftantia terrae a fole $y = 101045$
et $l y = 5,\ 0045148$
Porro eft $-k$ fin. $v = 45', 32''$
atque fin. $2v = -$ fin. $76^\circ, 32', 10''$
Ergo $l - \mathit{fin.}\ 2v = 9,\ 9878921$

$$
\begin{array}{r}
6,\ 4583825 \\
\hline
\end{array}
$$

z.

$$\begin{array}{rl} & 3,\ 5295096 \\ l\tfrac{1}{4}k = & -2,\ 5748676 \\ \hline & 1,\ 1546420 \end{array}$$

$-\tfrac{1}{4}k^2$ *fin.* $2v = 14''$

hincque $z = v + 45' + 18'' = 309°, 1', 23''$

feu anomalia vera z	=	10 S,	9°,	1',	23''
addatur longitudo aph. p	=	8 S,	8°,	25',	42''
Longitudo terrae	=	6 S,	17°,	27',	5''

§ 54. Inuentis terrae locis heliocentricis ad fingularum obferuationum momenta, poterimus loca mercurii obferuata per luminis propagationem corrigere fecundum regulam §. 30. datam. Erat autem pro obferuatione prima

longitudo ☿ obferuata	0 S,	9°,	23',	32''	
longitudo terrae	7 S,	0°,	24',	52''	fubtr.
	5 S,	8°,	58',	40''	

qui arcus eft $158°, 58', 40''$ vnde erit

μ = fin. $21°, 1', 20''$

$m = -$ fin. $68°, 58', 40''$

$$\begin{array}{rl} l\mu = & 9,\ 5546581 \\ l\,a = & 6,\ 0000000 \\ \hline & 15,\ 5546581 \\ l\,b = & 5,\ 5878232 \\ \hline l\,\frac{\mu a}{b} = & 9,\ 9668349 \end{array}$$

angulus cuius finus eft $\frac{\mu a}{b}$ eft $67°, 54'$

$q = cos.\ 67^\circ . 54'$ et $lq = 9,5754468$

$l\frac{c}{s} = 3,8140656$

$l\frac{sq}{c} = 5,7613812$

subtr. $4,6855749$

$1,0758063$

Ergo $\frac{s}{c}q = 12''$

Porro est $l-m = 9,9700900$

$l\frac{c}{r} = 4,0201540$

$5,9499360$

$4,6855749$

$1,2643611$

Ergo $-\frac{rm}{c} = 18''$

Ad longitudinem mercurii obseruatam ob propagationem lucis addi debent $12'' + 18''$ seu $30''$, ita vt vera mercurii longitudo in prima obseruatione sit

$0\,S, 9^\circ, 24', 2''$.

§. 55. Simili modo pro obseruatione secunda correctio ex propagatione lucis orta inuestigetur.

Longitudo mercurii obseruata	$3\,S, 9^\circ, 43', 0''$
Longitudo terrae helioc.	$9\,S, 27^\circ, 11', 36''$
	$5\,S, 12^\circ, 31', 24''$

qui arcus est $162^\circ, 31', 24''$

vnde erit $\mu = sin.\ 17^\circ, 28', 36''$

$m = -sin.\ 72^\circ, 31', 24''$

$l\,a\,\mu = 15,4775000$

$l\,b = 5,5878232$

$9,8896768$

angulus

angulus cuius finus eft $\frac{au}{b}$ eft $50°, 52'$

$q = cof. 50°, 52', = fin. 39°, 8'$

$l q = 9, 8001169$

$l \frac{c}{s} = 3, 8140656$

$5, 9860513$

$4, 6855749$

$1, 3004764$

Ergo $\frac{s}{c} q = 20''$

Porro $l - m = 9, 9794593$

$l \frac{c}{r} = 4, 0201540$

$5, 9593053$

$4, 6855749$

$1, 2737304$

Ergo $- \frac{r}{c} m = 18'' \frac{3}{4}$

Ad longitudinem mercurii obferuatam addi debent $38''$ ita vt vera longitudo mercurii tempore fecundae obferuationis a prima ftella arietis fit

$3 S, 9°, 43', 38''.$

§. 56. Pro tertia denique obferuatione correctio ad longitudinem mercurii obferuatam addenda fequenti modo inuenietur.

Longitudo mercurii obferuata. $0 S, 14°, 28', 14''$

Longitudo terrae a 1 * ♈ = $6 S, 17°, 27', 5''$

$5 S, 27°, 1', 9''$

Qui arcus eft $177°, 1', 9''$

vnde $\mu =$ fin. $2°, 58' 51''$

et $m = -$ fin. $87°, 1', 9''$

la μ.

$$
\begin{array}{rl}
la\mu = & 14,7163829 \\
lb = & 5,5878232 \\
\hline
 & 9,1285597
\end{array}
$$

angulus cuius finus $\frac{a\mu}{b}$ eft, $7^\circ, 44'$

$$q = \text{cof. } 7^\circ, 44', = \text{fin. } 82^\circ, 16'$$

$$
\begin{array}{rl}
lq = & 9,9960321 \\
l\frac{c}{s} = & 3,8140656 \\
\hline
 & 6,1819665 \\
 & 4,6855749 \\
\hline
 & 1,4963916
\end{array}
$$

Ergo $\frac{s}{c} q = 31\frac{1}{3}''$

Porro eft $l - m = 9,9994110$

$$
\begin{array}{rl}
l\frac{c}{r} = & 4,0201540 \\
\hline
 & 5,9792570 \\
 & 4,6855749 \\
\hline
 & 1,2936821
\end{array}
$$

Ergo $- \frac{r}{c} m = 19\frac{2}{3}''$

Ad longitudinem mercurii obferuatam addi debent $51''$ ita vt tertia obferuatione longitudo mercurii fuerit

$$0 S, 14^\circ, 29', 5''$$

Haec ita fe habent, quando mercurius a terra longius diftat quam fol: quodfi autem mercurius terrae propior effet quam fol, tum aequatio non erit, vt hic pofuimus $- \frac{r}{c} m + \frac{s}{c} q$ fed erit $- \frac{r}{c} m - \frac{s}{c} q$. Hoc autem apparebit, fi cum mercurii locus heliocentricus fuerit inuentus, diftantia mercurii et terrae heliocentrica minor fuerit quam 90 graduum.

duum. Cum igitur partes aequationis inuenerimus, post modum apparebit, vtrum eae partes addi, an a se inuicem subtrahi debeant; quare plenam correctionem ex propagatione luminis ortam eo vsque differemus, quoad longitudo mercurii heliocentrica fuerit determinata.

§. 57. His praepatatis primam mercurii obseruationem consideremus, atque ad hoc tempus ex tabulis locum mercurii supputemus. Erat igitur

Tempore medio A. 1715 Mai. 9 d. 22 h, 25′, 55″

Longitudo ☿ obseruata a 1 * ♈ = 0 S, 9°, 23, 32″

quae longitudo, si distantia mercurii et terrae heliocentrica maior sit 90°, augeri debet 18″ + 12″. E contrario autem, si haec distantia heliocentrica minor fuerit 90°, augeri debet 18″ − 12″

Latitudo ☿ obseruata est 2°, 23′, 55″ Australis.

Hoc porro tempore inuenta est

Longitudo terrae a 1 * ♈ = 7 S, 0°, 24′, 52″.

Distantia terrae a sole = 101318

Log. distantiae terrae a sole = 5, 0056867.

Deinde ex tabulis mercurii est

Distantia mercurii a sole media a = 38710

Log. huius distantiae seu $l\,a$ = 4, 5878232

Excentricitas orbitae mercurii $k = \frac{205889}{1000000}$

hincque $l\,k$ = (−1), 3136332

Longitudo Aphelii ☿ a 1 * ♈ p = 7 S, 13°, 48′

Longitudo Nodi asc. q = 0 S, 15°, 42′

Inclinatio orbitae ad Eclipt. n = 6°, 54′.

Iam ex tabulis ad tempus obseruationis supputetur anomalia media.

A. 1701	8 S, 4°, 2′, 0″
Anni 14	1, 14, 6′, 14
Mai.	4, 11, 4, 48
9 d.	1, 6, 49, 52
22 h.	3, 45, 5
25′, 55″	4, 25
	3 S, 9°, 52′, 24″

§. 58. Cum igitur §. 22. anomalia media posita sit x, erit pro hoc tempore $x = 99°, 52', 24''$, ex qua anomalia excentri v reperietur per hanc aequationem $v = x - k$ sin. ($x - k$ sin. ($x - k$ sin. ($x -$ etc.). Cum autem sit $l\,k = (-1)$. 3136332, atque a logarithmis sinuum subtrahi debeat, 4, 6855749, coniunctim subtrahi debebit 5, 3719417, vt sinus per k multiplicati in arcus conuertantur. Calculus ergo ita se habebit

$$l \text{ sin. } x = 9,\ 9935285$$
$$5,\ 3719417$$
$$\overline{4,\ 6215868}$$

$$k \text{ sin. } x = 41839'' = 697'\ 19'' = 11°,\ 37',\ 19''$$
$$\text{subtr. ab } x = 99°,\ 52',\ 24''$$
$$x - k \text{ sin. } x = \overline{88°,\ 15',\ 5''}$$

$$l \text{ sin. } = 9,\ 9997974$$
$$5,\ 3719417$$
$$\overline{4,\ 6278557}$$

$$\text{numerus: } 42248'' = 707',\ 28'' = 11°,\ 47',\ 28''$$
$$\text{subtrahatur ab } x = 99°,\ 52',\ 24''$$
$$\overline{88°,\ 4',\ 56''}$$

l sin.

l sin. $= 9, 9997566$
$5, 3719417$

$4, 6278149$

numerus: $42444'' = 707', 24'' = 11°, 47', 24''$
subtr. ab $x = 99°, 52', 24''$
Anomalia excentri $v = 88°, 5', 0''$

Hinc est distantia mercurii a sole $y = a + ak$ cos. v

$l\,a = 4, 5878232$
$l\,k = (-1), 3136332$

$l\,a\,k = 3, 9014564$
$l$cos. $v = 8, 5243430$

$2, 4257994$

ak cos. $v = 266$
$a = 38710$

$y = 38976$ Distantia mercutii a sole
$ly = 4, 5907973$.

Ex his inuenitur anomalia vera z ope huius aequationis cos. $z = \frac{ak\ \text{sin. tot.}}{y} + \frac{a\ \text{cos.}\ v}{y}$, quae praebet hunc calculum

$l\,a\,k$ sin. tot. $= 13, 9014564$
$l\,y = 4, 5907973$

$9, 3106591$

$\frac{ak\ \text{sin. tot.}}{y} = 2044839$
l cos. $v = 8, 5243430$
$l\,a = 4, 5878232$

$13, 1121662$
$l\,y = 4, 5907973$

$8, 5213689$

$$\frac{a \cos v}{y} = 332176$$
$$2044839$$

$$\cos. z = 2377015 = \sin. 13^\circ, 45', 3''$$

Ergo anomalia vera $z = 76^\circ, 14', 57''$.

§. 59. Nunc ordo postulat vt in distantiam aphelii a nodo inquiramus, quae posita est e, ex aequatione $\tan. e = \frac{\tan. (p-q)}{\cos. n}$.

$$p = 7\,S, 13^\circ, 40'$$
$$q = 0\,S, 15^\circ, 42'$$

$$p-q = 6\,S, 28^\circ, 6' = 208^\circ, 6'$$
$$\tan. (p-q) = \tan. 28^\circ, 6'$$
$$l \tan. (p-q) = 9, 7275008$$
$$l \cos. n = 9, 9968431$$

$$l \tan. e = 9, 7306577 = l \tan 28^\circ, 16', 24''$$

Ergo $e = 6\,S, 28^\circ, 16', 24'' = 208^\circ, 16', 24''$ qui valor pro omnibus obseruationibus idem manet. Sequitur longitudo planetae a nodo r, estque

$$\tan. r = \cos. n \tan. (e+z)$$
$$e = 6\,S, 28^\circ, 16', 24''$$
$$z = 2\,S, 16^\circ, 14', 57''$$

$$e+z = 9\,S, 14^\circ, 31', 21''$$
$$\tan. (e+z) = -\tan. 75^\circ, 28', 39''$$
$$l - \tan. (e+z) = 10, 5866389$$
$$l \cos. n = 9, 9968431$$

$$l - \tan. r = 10, 5834820$$
Ergo $r = 9\,S, 14^\circ, 37', 26''$

Ad longitudinem planetae a nodo r addatur longitudo nodi

nodi a prima ſtella arietis q, et ſumma erit longitudo mercurii heliocentrica a prima ſtella arietis

$$r = 9S,\ 14^\circ,\ 37',\ 36''$$
$$q = 0S,\ 15^\circ,\ 42'$$
$$\overline{r + q = 10S,\ 0^\circ,\ 19',\ 36''}$$

Cum igitur longitudo terrae ſit $7S,\ 0^\circ,\ 24',\ 52''$ longitudo heliocentrica mercurii a longitudine geocentrica ſubtracta relinquitur

$$0S,\ 9^\circ,\ 23',\ 32''$$
$$10S,\ 0^\circ,\ 19',\ 36''$$
$$\overline{2S,\ 9^\circ,\ 3',\ 56''}$$

ergo $q = cos.\ 69^\circ,\ 4'$ et $\frac{s}{c} q = 11''$, cum nunc ſit $-\frac{r}{c} m = 18''$ erit $\frac{s}{c} q - \frac{r}{c} m = 29''$; hincque longitudo mercurii obſeruata ob lucis propagationem augeri debet $29''$ etc. vt ea ſit $0S,\ 9^\circ,\ 24',\ 1''$

Latitudo autem heliocentrica s ad boream reſpiciens ex hac aequatione $fin.\ s = fin.\ n\ .\ fin.\ (e+z)$ definietur, eſtque $fin.\ (e+z) = -fin.\ 75^\circ,\ 28',\ 39''$ vnde

$$l - fin.\ (e+z) = 9{,}9858974$$
$$l\ fin. = 9{,}0796762$$
$$\overline{l - fin.\ s = 9{,}0655736}$$

ergo $s = -\ 6^\circ,\ 40',\ 42''$, ex quo latitudo heliocentrica mercurii erit auſtralis atque $= 6^\circ,\ 40',\ 42''$.

§. 60. Definito loco heliocentrico pergo ad locum mercurii geocentricum ſupputandum, ad quod erit diſtantia terrae a ſole $c = 101318$

$$l\ c = 5{,}0056867$$

longitudo terrae $u = 7S,\ 0^\circ,\ 24',\ 52''$

Nunc

Nunc quaeratur angulus $pTV = t$, ex aequatione

$$cot.\, t = cot.\, (u-q-r) - \frac{c}{y\, cos.\, s\, sin.\, (u-q-r)}$$

Est vero $u = 7S, 0^\circ, 24', 52''$
$q + r = 10S, 0^\circ, 19', 36''$

$u - q - r = 9S, 0^\circ, 5', 16''$

ergo cot. $(u-q-r) = -$ tang. $0^\circ, 5', 16'' = -15319$

Porro $ly =$	4,5907973
l cos. $s =$	9,9974701
l-sin. $(u-q-r) =$	9,9999994
l-y cos. s. sin. $(u-q-r) =$	24,5882668
lc (sin. tot.)^2 =	35,0056867
l-y cos. s sin. $(u-q-r) =$	24,5882668
	10,4174199
ergo $\frac{-c}{y\, cos.\, s\, sin.\, (u-q-r)} =$	26146880
+ cot. $(u-q-r) = -$	15319
cot. $t =$	26131561

Ergo t est $20^\circ, 56', 27''$ vna cum sex signis, vti conditio problematis requirit, quod figurae repraesentio facile commonstrat. Quare cum sit $t = 6S, 20^\circ, 56', 27''$, hinc longitudo mercurii geocentrica f innotescit ex hac aequatione $f = u - t$

Est vero $u = 7S, 0^\circ, 24', 52''$
$t = 6S, 20^\circ, 56', 27''$
$f = 0S, 9^\circ, 28', 25''$

Actu autem longitudo mercurii ad hoc tempus obseruata est $F = 0S, 9^\circ, 24', 1''$

Ex quo est $F - f = df = -4', 24'' = -264''$ qui est error tabularum in longitudine commissus.

§. 61.

§. 61. Latitudo denique Geocentrica g reperietur ex hac aequatione $\text{tang.}\, g = \frac{\text{sin.}\, t \cdot \text{tang.}\, s}{\text{sin.}\, (u-q-r)}$

$$l - \text{sin.}\, t = 9,5531590$$
$$l - \text{tang.}\, s = 9,0685182$$
$$18,6216772$$
$$l - \text{sin.}\, (u-q-r) = 9,9999994$$
$$l - \text{tang.}\, g = 8,6216778$$

Ergo $g = -2°, 23', 46''$. Latitudo ergo Geocentrica erit australis atque aequalis $2°, 23', 46''$

Latitudo autem obseruata est $= 2°, 23', 55''$

Erit ergo $G = -2°, 23', 55''$

$$g = -2°, 23', 46''$$

Atque $G - g = dg = -9''$

Qui est error tabularum in latitudine commissus.

§. 62. Quod si nunc, vt supra fecimus, tabulas ponamus correctas, valores inuenti df et dq per aberrationes tabularum inueniendas dm, dp, dq, dn et dk sequenti modo determinabuntur.

$$df = \frac{(dq+dr)(\text{sin.}\, t)^2}{(\text{sin.}\, (u-q-r))^2} + \frac{acdk \cos.z (\text{sin.}\, t)^2}{yy \cos.s. \text{sin.}\, (u-q-r)} - \frac{a^2ckdm\, \text{sin.}\, v (\text{sin.}\, t)^2}{y^3 \cos.s. \text{sin.}\, (u-q-r)}$$
$$- \frac{cds\, \text{tang.}\, s (\text{sin.}\, t)^2}{y \cos.s \text{sin}\, (u-q-r)} - \frac{c(dq+dr)\cot.t (u-q-r)(\text{sin.}\, t)^2}{y \cos.s \text{sin.}\, (u-q-r)}$$

$$dg = \frac{ds\, \text{sin.}\, t (\cos.g)^2}{(\cos.s)^2 \text{sin.}\, (u-q-r)} - \frac{df \cos.t.\text{tang.}\, s (\cos.g)^2}{\text{sin.}\, (u-q-r)} + \frac{(dq+dr)\text{sin.}\, t \cdot \text{tang.}\, s (\cos.g)^2}{\text{sin.}\, (u-q-r) \text{tang.}\, (u-q-r)}$$

Aequationes autem subsidiariae sunt hae:

$$ds = \frac{dn \cos.n. \text{sin.}\, (e+z)}{\cos.s} + \frac{(de+dz)\text{sin.}\, n \cos.(e+z)}{\cos.s}$$

$$dr = \frac{(de+dz)\cos.n (\cos.r)^2}{(\cos.(e+z))^2} - dn\, \text{sin.}\, n\, \text{tang.}\, (e+z)(\cos.r)^2$$

$$de = \frac{(dp-dq)(\cos.e)^2}{\cos.n (\cos.(p-q))^2} + \frac{dn\, \text{sin.}\, n\, \text{tang.}\, (p-q)(\cos.e)^2}{(\cos.n)^2}$$

$$dz = \frac{adm\, \text{sin.}\, z}{y\, \text{sin.}\, v} - \frac{adk\, \text{sin.}\, z}{y} - \frac{dk\, \text{sin}\, z}{1-kk}$$

Quantitatum autem finitarum valores, quae in his formulis insunt, ita se habent

$a = 38710 \; . \; la = 4,5878232$

$c = 101318 \; . \; lc = 5,0056867$

$\frac{1}{1-kk} = \frac{1000000 \cdot 1000000}{794111 \cdot 1205889} \; . \; l\frac{1}{1-kk} = 0,0188112$

$n = 6^\circ, 54'$

$v = 88^\circ, 5'$

$y = 38976. \; ly = 4,5907973$

$z = 76^\circ, 14', 57''$

$p-q = 6S, 28^\circ, 6'$

$e = 6S, 28^\circ, 16', 24''$

$e+z = 9S, 14^\circ, 31', 26''$

$r = 9S, 14^\circ, 37', 26''$

$s = - \; 6^\circ, 40', 42''$

$u-q-r = 9S, 0^\circ, 5', 16''$

$t = 6S, 20^\circ, 56', 27''$

$g = -2^\circ, 23', 46''$

§. 63. Quaeramus primum dz ex aequatione:

$$dz = \frac{a\,dm\,\text{fin.}\,z}{y\,\text{fin.}\,v} - \frac{a\,dk\,\text{fin.}\,z}{y} - \frac{dk\,\text{fin.}\,z}{1-kk}$$

vbi notandum est coefficientes ipsius dk in minutis secundis exprimi oportere, quia reliqua differentialia omnia dm, dp, dq, et dn in minutis secundis definiri debent. Erit ergo

$$\begin{array}{lr} la & = 4,5878232 \\ l\text{fin.}\,z & = 9,9873707 \\ \hline & 14,5751939 \\ ly & = 4,5907973 \\ \hline & 9,9843966 \end{array}$$

$l\text{fin.}\,v$

l sin. v = 9, 9997570

(−1), 9846396 l coeff. dm

numerus = 0, 9652 = coeff. dm

$l\frac{a\,\text{fin.}\,z}{y}$ = 9, 9843966

4, 6855749

5, 2988217 = $l\frac{a\,\text{fin.}\,z}{y}$ in sec.

$\frac{a\,\text{fin.}\,z}{y} = 198985''$

l sin. z = 9, 9873707

$l\frac{1}{1-kk}$ = 0, 0188112

10, 0061819

4, 6855749

5, 3206070 = $l\frac{\text{fin.}\,z}{1-kk}$ in sec.

$\frac{\text{fin.}\,z}{1-kk} = 209222''$

$408207''$ = coeff. dk

Ergo $dz = 0,9652.\ dm - 408207''.\ dk$

l 0, 9652 = (−1), 9846396

l 408207′ = 5, 6108805.

§. 64. Deinde quaeratur expressio, cui de est aequalis ex hac aequatione

$$de = \frac{(dp-dq)(\text{cof.}\,e)^2}{\text{cof.}\,n(\text{cof.}(p-q))^2} + \frac{dn\,\text{fin.}\,n\,\text{tang.}(p-q)(\text{cof.}\,e)^2}{(\text{cof.}\,n)^2}$$

l−cof. e = 9, 9448270	l fin. n = 9, 0796762
l(cof. $e)^2$ = 19, 8896540	l tang $(p-q)$ = 9, 7275008
l cof. n = 9, 9968431	l−cof. $(p-q)$ = 9, 9455310
l(cof. $n)^2$ = 19, 9936862	l(cof.$(p-q))^2$ = 19, 8910620

 l(cof.

$$l\,(\text{cos. } e\,) = 19,\ 8896540$$
$$\text{cos. } n = 9,\ 9968431$$
$$19,\ 8928109$$
$$l\,\text{cos. } (p-q))^2 = 19,\ 8910620$$
$$0,\ 0017489$$

coeffic. $(\,dp - dq\,) = 1,\ 0040$

Porro l fin. $n = 9,\ 0796762$

$$l\,\text{tang. } (p-q) = 9,\ 7275008$$
$$l\,\text{cos. } e\,)^2 = 19,\ 8896540$$
$$38,\ 6968310$$
$$l\,(\,\text{cos. } n\,)^2 = 19,\ 9936862$$
$$(-2),\ 7031448$$

coeff. $dn = 0,\ 0505$

Ergo $de = 1,\ 0040,\ dp - 1,\ 0040\,dq + 0,\ 0505 \,.\, dn$

$l\,1,\ 0040 = 0,\ 0017489$; $l\,0,\ 0505 = (-2),\ 7031448$

§. 65. Sequitur differentiale ipfius dr ex hac aequatione definiendum:

$$dr = \frac{(de + dz)\,\text{cof. } n\,(\text{cof. } r)^2}{(\text{cof. } (e+z))^2} - dn \text{ fin. } n \,.\, \text{tang. } (e+z)\,(\text{cof. } r)^2$$

$$l\text{-tang. } (e+z) = 10,\ 5866389$$
$$l\,\text{cof. } r = 9,\ 4022145$$
$$l\,(\,\text{cof. } r\,)^2 = 18,\ 8044290$$
$$l\,\text{cof. } (e+z) = 9,\ 3992584$$

Ergo l cof. $n = 9,\ 9968431$

$$l\,(\,\text{cof. } r\,)^2 = 18,\ 8044290$$
$$28,\ 8012721$$
$$l(\text{cof. } (e+2)\,)^2 = 18,\ 7985168$$
$$0,\ 0027553 \qquad \text{coeff.}$$

coeff. $(de+dz) = 1,0064$

Porro l fin. $n = 9,0796762$

l — tang. $(e+z) = 10,5866389$

$l(\text{cof.} r)^2 = 18,8044290$

$(-2),4707441$

coeff. $-dn = 0,0296$.

Ergo $dr = 1,0064.dz + 1,0064.de + 0,0296.dn$

$l1,0064 = 0,0027553$; $l0,0296 = (-2),4707441$

Valoribus autem ipforum dz et de fubftitutis prodit $dr = 0,9714.dm - 410805''.dk + 1,0104.dp - 1,0104.dq + 0,0804.dn$

$l0,9714 = (-1),9873949$

$l410805'' = 5,6136358$

$l1,0104 = 0,0045042$

$l0.0804 = (-2),90\cdot2560$

§. 66. Habetur praeterea haec aequatio:

$$ds = \frac{dn\,\text{cof}\,n.\,\text{fin}.\,(e+z)}{\text{cof}.\,s} + \frac{(de+dz)\,\text{fin}\,n.\,\text{cof}.\,(e+z)}{\text{cof}.\,s}$$

l — fin. $(e+z) = 9,9858973$

l cof. $n = 9,9968431$

$19,9827404$

l cof. $s = 9,9974701$

$(-1),9852703$

coeff. $-dn = 0,9667$

Porro l fin. $n = 9,0796762$

l cof. $(e+z = 9,3992584$

$18,4789346$

$l$cof. $s = 9,9974\text{-}01$

$(-2),4814645$

coeff.

coeff. $(de + dz) = 0,0303$
Ergo $ds = -0,9667 \,.\, dn + 0,0303 \,.\, dz + 0,0303 \,.\, de$. Subſtitutis autem loco dz et de valoribus erit : $ds = 0,0292 \,.\, dm - 12369'' \,.\, dk + 0,0304 \,.\, dp - 0,0304 \,.\, dq - 0,9652 \,.\, dn$

$l\, 0,0304 = (-2),4832134$
$l\, 0,0292 = (-2),4661041$
$l\, 12369'' = 4,0923450$
$l\, 0,9652 = (-1),9846173$

§. 67. His praeparatis poterimus tandem definire df ex hac aequatione.

$$df = \frac{(dq + dr)(\text{ſin}.\, t)^2}{(\text{ſin}.\, (u-q-r))^2} + \frac{acdk \text{ coſ } z\, (\text{ſin}.\, t)^2}{yy \text{ coſ}.\, s.\, \text{ſin}.\, (u-q-r)} - \frac{a^2 ckdm\, \text{ſin}.\, v\, (\text{ſin}.\, t)}{y^3 \text{ coſ}.\, s.\, \text{ſin}.\, (u-q-r)}$$
$$\frac{-cds \text{ tang}.\, s\, (\text{ſin}.\, t)^2}{y \text{ coſ}.\, s.\, \text{ſin}.\, (u-q-r)} - \frac{c(dq + dr) \text{ cot}.\, (u-q-r)\, (\text{ſin}.\, t)^2}{y \text{ coſ}.\, s.\, \text{ſin}.\, (u-q-r)}$$

Eſtque $l - \text{ſin}.\, (u-q-r) = 9,9999994$
$l - \text{cot}.\, (u-q-r) = 21852304$
$l - \text{ſin}.\, t = 9,5531590$
$l \text{ coſ}.\, z = 9,3760292$
$l \text{ ſin}.\, v = 9,9997570$
$l - y \text{ coſ}.\, s.\, \text{ſin}.\, (u-q-r) = 24,5882668$
$l k = (-1),3136332$
Hinc habetur : $l\, (\text{ſin}.\, t)^2 = 19,1063180$
$l\, (ſ(u-q-r))^2 = 19,9999988$

l coeff. $(dq + dr) = (-1),1063192 : n. = 0,1277$
Porro : $l\, a\, c = 9,5935099$
$l \text{ coſ}.\, z = 9,3760292$
$l\, (\text{ſin}.\, t)^2 = 19,1063180$

$38,0758571$

$l\, y$

ly	$=$	4, 5907973
		33, 4850598
$l\,-y$ cof. s fin. $(u-q-r)$	$=$	24. 5882668
		8, 8967930
		4, 6855749
l coeff. $-dk$	$=$	4, 2112181 $n:=16264''$
Porro $l\,ac\,(\text{fin.}\,t)^2$	$=$	28, 6998279
la	$=$	4, 5878232
lk	$=$	(−1) 3136332
l fin. v	$=$	9, 9997570
		42, 6010413
ly^2	$=$	9, 1815946
		33, 4194467
$l\text{-}y$ cof. s fin. $(u-q-r)$	$=$	24, 5882668 + 10
l coeff. $+dm$	$=$	(-2), 8311799 $n:=0,0678$
Porro lc	$=$	5, 0056867
$l-$ tang. s	$=$	9, 0685182
$l(\text{fin.}\,t)^2$	$=$	19, 1063180
		33, 1805229
$l\text{-}y$ cof. s fin. $(u-q-r)$	$=$	24, 5882668 + 10
l coeff. $-ds$	$=$	(-2), 5922561 $n=0,0391$
Denique $lc\,(\text{fin.}\,t)^2$	$=$	24, 1120047
$l-$ cot. $(u-q-r)$	$=$	7, 1852304
$l\text{-}y$ cof. s fin. $(u-q-r)$	$=$	31, 2972351
		24, 5882668
l coeff. $-dq-dr$	$=$	(-4), 7089683 $n:=0,0005$. Erit

Erit ergo $df = 0,1272 . dq + 0,1272 . dr - 16264'' . dk$
$+ 0,0678 . dm - 0,0391 . ds$

Atque ſubſtitutis loco dr et ds valoribus inuentis; erit
$df = 0,1902 . dm - 68035'' . dk + 0,1273 . dp$
$- 0,0001 . dq + 0,0479 . dn$

§. 68. Reſtat denique vt pari modo alteram aequationem ad hanc obſeruationem accommodemus, quae eſt haec.

$$dg = \frac{ds \, \text{ſin.}\, t \, (\text{coſ.}\, g)^2}{(\text{coſ.}\, s)^2 \, \text{ſin}\, (u-q-r)} - \frac{df \, \text{coſ.}\, t \, \text{tang.}\, s (\text{coſ.}\, g)^2}{\text{ſin.}\, (v-q-r)} + \frac{(dq+dr) \, \text{ſin.}\, t \, \text{tang}\, s (\text{coſ.}\, g)^2}{\text{ſin.}\, (u-q-r) \, \text{tang.}\, (u-q-r)}$$

l coſ. g = 9,9996201

l coſ. $g)^2$ = 19,9992402
l − ſin. t = 9,5531590

29,5523992
l coſ. $s)^2$ = 19,9949402

9,5574590
l ſin. $(u-q-r)$ = 9,9999994

l coeff. $+ds$ = (−1),5574596 num: = 0,36096

Porro l − coſ. t = 9,9703236
l − tang. s = 9,0685182
l coſ. $g)^2$ = 19,9992402

39,0380820
l − ſin. $(u-q-r)$ = 9,9999994 + 30
l coeff. $+df$ = (−1), 0380826 num: = 0,10916

Deinde l − ſin. t = 9,5531590
l − tang. s = 9,0685182
l (coſ. $g)^2$ = 19,9992402

38,0209174

l − ſin.

$l -$ sin. $(u-q-r) =$ 9, 9999994

28, 6209180

$l -$ cot. $(u-q-r) =$ 7, 1852304 -40

l coeff. $+dq+dr = (-5), 8061484$ num : 0, 00006

Quamobrem erit.

$dg = 0{,}36096.ds + 0{,}10916.df + 0{,}00006.dq + 0{,}00006.dr.$

substitutis autem loco dr et ds valoribus inuentis erit

$dg = 0{,}10916.\,df + 0{,}01062.\,dm - 4491''.\,dk$

$+ 0{,}01104.\,dp - 0{,}01098.\,dq - 0{,}3480.\,dn$

Cum igitur sit $df = -264''$, et $dg = -9''$, vt supra inuenimus §. §. 60 et 61, erit $0{,}10916.\,df = -29''$ atque ex hac prima obseruatione habebuntur istae duae aequationes pro correctione tabularum:

$$-264'' = 0{,}1902.\,dm - 68035''dk + 0{,}1273.\,dp - 0{,}0001.\,dq + 0{,}0479.\,dn$$

et

$$20'' = 0{,}01062.\,dm - 4491''.\,dk + 0{,}01104.\,dp - 0{,}01098.\,dq - 0{,}3480.\,dn$$

§. 69. Progrediamur iam ad secundam mercurii obseruationem, quae ita se habet:

Tempore medio A. 1716. Aug. 7 d. 22 h. 45′, 6″

Longitudo ☿ a 1 * ♈ obseruata est 3 S, 9°, 43′, 0″
quam ob lucis propagationem postmodum corrigemus.

Latitudo ☿ obseruata fuit: 0°, 13′, 30″, Borealis

Pro hoc autem tempore inuenta est

Longitudo terrae a 1 * ♈ $=$ 9 S, 27°, 11′, 36″ $= u$

Distantia terrae a Sole $= 101096 = c$

vnde $lc = 5{,}0047340$

Data autem, quibus tabulae corrigendae sunt superstructae

 supra

ſupra §. 57. exhibuimus. Iam ad hoc tempus ex tabulis ſupputemus anomaliam mediam.

A. 1701	8 S, 4°, 2′, 0″
Anni 15	3, 7, 48, 21
Aug. Menſis	4, 27, 34, 29
ob biſſext: 8.d.	1, 2, 44, 19
22 h	3, 45, 5
45′6″	7, 41
	5 S, 16°, 1′, 55″

Erit igitur anomalia media $x = 166°, 1', 55''$ et ſin. $x =$ ſin. $13°, 58', 5''$. Hinc reperietur anomalia media $v = 162°, 28', 52''$; et ex hac porro diſtantia mercurii a ſole: $l\,ak = 3,9014564$

$l -$ coſ. $v. = 9,9793743$

$3,8808307$

ak coſ. $v = - 7600$

$a = 38710$

Ergo diſtantia ☿ a Sole $y = 31110$, et $ly = 4,4929000$ Deinde hinc colligitur anomalia vera mercurii, z

$l\,ak$ ſin. tot. $= 13,9014564$

$ly = 4,4929000$

$9,4085564$

$\frac{ak\,\text{ſin. tot.}}{y} = 2561867$

Porr $l -$ coſ. $v = 9,9793743$

$l\,a = 4,5878232$

$14,5671975$

$l\,y = 4,4929000$

$10,0742975$

— a

$$-\frac{a\ cos.\ v}{y} = 11865817$$
$$+\frac{a\ k\ sin.\ tot.}{y} = 2561867$$

$$cos.\ z = -9303950 = -sin. 68^\circ, 29', 49''$$
$$\text{Ergo}\ z = 158^\circ, 29', 49''$$

§. 70. Diſtantia aphelii a nodo e manet perpetuo eadem, eſtque $e = 6S, 28^\circ, 16', 24''$. Ex hac vero reperietur longitudo mercurii a nodo tang. $r =$ coſ. n tang. $(e+z)$

$$e = 6S, 28^\circ, 16', 24''$$
$$z = 5S, 8^\circ, 29', 49''$$
$$e+z = 0S, 6^\circ, 46', 13''$$

l tang. $(e+z) = 9, 0745115$
l coſ. $n = 9, 9968431$

l tang. $r = 9, 0713546$
Ergo $r = 0S, 6^\circ, 43', 18''$
at $q = 0S, 15^\circ, 42', 0''$

$r+q = 0S, 22^\circ, 25', 18''$

quae eſt longitudo planetae heliocentrica: Latitudo autem heliocentrica ita inuenietur.

l ſin. $(e+z) = 9, 0714725$
l ſin. $n = 9, 0796762$

l ſin. $s = 8, 1511487$

Ergo $s = 0^\circ, 48', 41''$ Latitudo ergo heliocentrica eſt borealis, atque $= 0^\circ, 48', 41''$. Sic itaque inuentus eſt locus mercurii heliocentricus ad tempus ſecundae obſeruationis.

§. 71. Antequam hinc ad locum mercurii geocentricum inueſtigandum procedam, correctionem ex propagatione lucis ortam definire conueniet, quae cum ſit $= \frac{s}{c} q - \frac{r}{c}$ atque iam ſupra inuentum ſit $\frac{r}{c} m = -18'' \frac{3}{4}$: quaeratur q

long. ☿ geocentrica	=	3 S, 9°, 43′, 0″
long. ☿ heliocentrica	=	0 S, 22°, 25′, 18″
diff.		2 S, 17°, 17′, 42″

Ergo $q =$ coſ. 77°, 17′, 42″

$lq = 9, 3421190$
ſubtr. $8, 4996405$

$0, 8424785$

Ergo $\frac{s}{c} q = 7''$

Quamobrem longitudo mercurii obſeruata augeri debet 26″ ita vt ſit vera longitudo mercurii F = 3 S, 9°, 43′, 26″ atque latitudo G = 0°, 13′, 30″.

§. 72. Vt nunc locum mercurii geocentricum definiamus, quaerendus primum eſt angulus p T V ex hac aequatione $\cot. t = \cot. (u - q - r) - \frac{c}{y \cos. s \sin. (u - q - r)}$.

at eſt $u = 9S, 27°, 11', 36''$
$q + r = 0S, 22°, 25', 18''$

$u - q - r = 9S, 4°, 46', 18''$

cot. $(u-q-r) = -$ tang. 4°, 46′, 18″ $= -834743$

$l\,y$	=	4, 4929000
l coſ. s	=	9, 9999564
l-ſin. $(u-q-r)$	=	9, 9984921

l–y

$$\begin{array}{rl} l\text{-}y\,\text{cos}.\,s\,\text{sin}.(u-q-r) = & 24\,,\ 4913485 \\ a\,l(\text{sin.tot.})^3 = & 35\,,\ 0047340 \\ \hline & 10\,,\ 5133855 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \dfrac{-c}{y\,\text{cos}.\,s\,\text{sin}.(u-q-r)} = & 32612610 \\ +\text{cot}.(u-q-r) = & -\ 834743 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{cot}.\,t = 31777867 = \text{tang}.\ 72^\circ,\ 31',\ 55''$$

Ergo $t = 17^\circ,\ 28',\ 5''$ vna cum 6 fignis.

Cum igitur inuentus fit valor anguli $pTV = t$; ita longitudo geocentrica reperietur

$$\begin{array}{rl} t = & 6S,\ 17^\circ,\ 28',\ 5'' \\ u = & 9S,\ 27^\circ,\ 11',\ 36'' \\ \hline u-t = & 3S,\ 9^\circ,\ 43',\ 31'' \end{array}$$

Erit igitur ob $f = u - t$ longitudo geocentrica ex tabulis inuenta $f = 3S,\ 9^\circ,\ 43',\ 31''$

Quare cum vera longitudo hoc tempore ex obferuationibus deducta fit:

$$F = 3S,\ 9^\circ,\ 43,\ 26''$$

Erit $F - f = df = -\ 5''$.

§. 73. Latitudo g denique geocentrica g obtinebitur ex hac aequatione $\text{tang}.\,g = \dfrac{\text{fin}.\,t\ \text{tang}.\,s}{\text{fin}.\,(u-q-r)}$

vnde

$$\begin{array}{rl} l-\text{fin}.\,t = & 9,\ 4773730 \\ l\,\text{tang}.\,s = & 8\,,\ 1511923 \\ \hline & 17\,,\ 6285653 \\ l\text{-fin}.\,(u-q-r) = & 9\,,\ 9984921 \\ \hline l\,\text{tang}.\,g = & 7\,,\ 9300732 \end{array}$$

 Ergo

Ergo $g = 0°, 14', 40''$ At eſt latitudo
vera $G = 0, 13', 30''$ Quare erit
$G-g = dg = -, 70''$

§. 74. Definiamus nunc ordine valores differentialium dz, de, dr, ds, df et dg. ac primo quidem differentiale dz ad modum §. 63.

$$
\begin{array}{rl}
l\,a = & 4,\ 5878232 \\
l\,\text{ſin.}\,z = & \underline{9,\ 5641341} \\
 & 14,\ 1519573 \\
l\,y = & \underline{4,\ 4929000} \\
 & 9,\ 6590573 \\
l\,\text{ſin.}\,v = & \underline{9,\ 4785956} \\
l\,\text{coeff.}\,dm = & 0,\ 1804617 \\
\text{coeff.} + dm = & 1,\ 5151
\end{array}
$$

Porro eſt $l\,\frac{a\,\text{ſin.}\,z}{y} = 9,\ 6590573$

$$
\begin{array}{r}
4,\ 6855749 \\
\hline
4,\ 9734824
\end{array}
$$

Num. in ſecundis $= 94077$

$$
\begin{array}{rl}
l\ \text{ſin.}\ z = & 9,\ 5641341 \\
l\ \frac{1}{1-kk} = & \underline{0,\ 0188112} \\
 & 9,\ 5829453 \\
 & \underline{4,\ 6855749} \\
 & 4,\ 8973704
\end{array}
$$

Numerus in ſecundis $= 78954''$
$\underline{94077}$

Coeff. $dk = 173031''$.

Ergo

Ergo $dz = 1,5151 \,.\, dm - 173031''.\, dk$

$l\, 1,5151 = 0,1804617$

$l\, 173031 = 5,2381230$

Deinde de retinet valorem suum vt ante §. 64. $de = 1,0040 \,.\, dp - 1,0040 \,.\, dq + 0,0505 \,.\, dn$

$l\, 1,0040 = 0,0017489$

$l\, 0,0505 = (-2),7031448$

§. 75. Hunc ad modum §. 65 quaeramus dr.

l cos. $r = 9,9970045$

l cos. $(e+z) = 9,9969610$

Ergo l cos. $n = 9,9968431$

$l\,(\text{cos. } r)^2 = 19,9940090$

$29,9908521$

l cos. $(e+z)^2 = 19,9939220$

$(-1),9969301 = l$ coeff. $(de + dz)$

l sin. $n = 9,0796762$

l tang. $(e+z) = 9,0745115$

$l\,(\text{cos. } r)^2 = 19,9940090$

$(-2),1481967$

coeff. $-dn = 0,01406$

Ergo $dr = 1,5045 \,.\, dm - 171812''.\, dk + 0,99696 \,.\, dp - 0,99696 \,.\, dq - 0,03606 \,.\, dn$

$l\, 1,5045 = 0,1773918$	$l\, 0,99696 = (-1),9986790$
$l\, 171812'' = 5,2350531$	$l\, 0,03606 = (-2),5570257$

Ad modum §. 66 quaeratur valor ipsius ds vt sequitur

l sin.

$$
\begin{array}{rl}
l \text{ sin.}(e+z) = & 9,0714725 \\
l \text{ cos. } n = & 9,9968431 \\
\hline
 & 19,0683156 \\
l \text{ cos. } s = & 9,9999564 \\
\hline
l \text{ coeff. } dn = & (-1),0683592 \\
\text{coeff. } dn = & 0,11704 \\
l \text{ sin. } n = & 9,0796762 \\
l \text{ cos.}(e+z) = & 9,9969610 \\
\hline
 & 19,0766372 \\
l \text{ cos. } s = & 9,9999564 \\
\hline
l \text{ coeff.}(de+dz) = & (-1),0766808
\end{array}
$$

Ergo $ds = 0,18078 . dm - 20644''. dk + 0,1198. dp - 0,1198 . dq + 0,12306 . dn$

$$
\begin{array}{rl}
l\,0,18078 = & (-1),2571425 \\
l\,20644'' = & 4,3148038 \\
l\,0,1198 = & (-1),0784297 \\
l\,0,12306 = & (-1),0901170
\end{array}
$$

§. 76. His praemissis determinetur valor ipsius df secundum §. 67:

$$
\begin{array}{rl}
l(\text{sin. } t)^2 = & 18,9547460 \\
l(\text{sin.}(u-q-r))^2 = & 19,9969842 \\
\hline
 & (-2),9577618
\end{array}
$$

coeff. $+dq+dr = 0,09073$

$$l \text{ ac} = 9,5925572$$

l—

$$l - \text{cos.}\, z = 9,\ 9686688$$
$$l\,(\text{sin.}\, t)^2 = 18,\ 9547460$$
$$38,\ 5159720$$
$$l\,y = 4,\ 4929000$$
$$34,\ 0230720$$
$$l\text{-}y\,\text{cos.}\,s\,\text{sin.}\,(u-q-r) = 24,\ 4913485$$
$$9,\ 5317235$$
$$4,\ 6855749$$
$$l\,\text{coeff.} + d\,k = 4,\ 8461486$$
$$\text{coeff.} + d\,k = 70169''$$
$$l\,\text{ac}\,(\text{sin.}\, t)^2 = 28,\ 5473032$$
$$l\,a = 4,\ 5878232$$
$$l\,k = (-1),\ 3136332$$
$$l\,\text{sin.}\,v = 9,\ 4785956$$
$$41,\ 9273552$$
$$l - y^3\,\text{cos.}\,s\,\text{sin.}\,(u-q-r) = 33,\ 4771485$$
$$l\,\text{coeff.} + d\,m = (-2),\ 4502067$$
$$\text{coeff.} + d\,m = 0,\ 02819$$
$$l\,c = 5,\ 0047340$$
$$l\,\text{tang.}\,s = 8,\ 1511923$$
$$l\,(\text{sin.}\,t)^2 = 18,\ 9547460$$
$$32,\ 1106723$$
$$-y\,\text{cos.}\,s.\,\text{sin.}\,(u-q-r) = 24,\ 4913485$$
$$l\,\text{coeff.} + d\,s = (-3),\ 6193238$$
$$l\,c\,(\text{sin.}\,t)^2 = 23,\ 9594800$$

$$
\begin{array}{rl}
l-\text{cot.}\ (u\text{-}q\text{-}r) = & 8,\ 9215526 \\
\hline
 & 32,\ 8710326 \\
l-y\ \text{cof.}\ s\ \text{fin.}\ (u\text{-}q\text{-}r) = & 24,\ 4913485 \\
\hline
 & (-2),\ 3796841 \\
\text{coeff.}\ -dq-dr = & 0,\ 02397 \\
\text{coeff.}\ +dq+dr = & 0,\ 09073 \\
\hline
\text{coeff.}\ +dq+dr = & 0,\ 06676\ \log. = (-2), 8245163
\end{array}
$$

Ergo $df = 0{,}1294 \,.\, dm + 58612''.\, dk + 0{,}0670.$ $dp - 0{,}00028 \,.\, dq - 0{,}0019 \,.\, dn$

§. 77. Reſtat denique valor dg, ex §. 68. inueniendus

$$
\begin{array}{rl}
l(\text{cof.}\ g)^2 = & 19,\ 9999922 \\
l-\text{fin.}\ t = & 9,\ 4773730 \\
\hline
 & 29,\ 4773652 \\
l(\text{cof.}\ s)^2 = & 19,\ 9999128 \\
\hline
 & 9,\ 4774524 \\
l-\text{fin.}\ (u-q-r) = & 9,\ 9983921\ -10 \\
\hline
l\ \text{coeff.}\ +ds = & (-1),\ 4789603 \\
\hline
l-\text{cof}\ t = & 9,\ 9794958 \\
l\ \text{tang.}\ s = & 8,\ 1511923 \\
l(\text{cof.}\ g)^2 = & 19,\ 9999922 \\
\hline
 & 38,\ 1306803 \\
l-\text{fin.}\ (u\text{-}q\text{-}r) = & 9,\ 9984921\ +30 \\
\hline
 & (-2),\ 1321882 \\
\text{coeff.}\ -df = & 0,\ 01356
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rcl}
l-\text{fin.}\, t\,(\text{cof.}\, g)^2 & = & 29,\ 4773652 \\
l\,\text{tang.}\ s & = & 8,\ 1511923 \\
l-\text{cot.}\,(u\text{-}q\text{-}r) & = & 8,\ 9215526 \\
\hline
 & & 46,\ 5501101 \\
l-\text{fin.}\,(u\text{-}q\text{-}r) & = & 9,\ 9984921 + 40 \\
\hline
l\,\text{coeff.}\ -dq-dr & = & (-4),\ 5516180 \\
\text{coeff.}\ -dq-dr & = & 0,\ 00036.
\end{array}$$

Hinc itaque prodit

$$dg = -0,01356\,.\,df + 0,0539\,.\,dm - 6158''.\,dk + 0,03574\,.\,dp - 0,0361\,.\,dq + 0,3708\,.\,dn.$$

Cum nunc fit $df = -5''$ et $dg = -70''$.
habebuntur ex obferuatione fecunda hae duae aequationes:

$$-5'' = 0,1294\,.\,dm + 58612''.\,dk + 0,0670\,.\,dp - 0,00028\,.\,dq - 0,0019\,.\,dn$$

et

$$-70'' = 0,0539\ dm - 6158''.\,dk + 0,0357.\,dp - 0.0361\,.\,dq + 0,03708\,.\,dn.$$

§. 78. Refidua eft vltima obferuatio, quae ita fe habet:

Tempore medio A. 1717. April. 25 d. h. 33′, 7″
Longitudo ☿ a 1 * ♈ obferuata eft 0 S, 14°, 28′, 14″
Latitudo ☿ obferuata eft 0°, 18′, 30′. Auftralis.

Pro hoc autem tempore inuenta eft
Longitudo terrae a 1 * ♈ : $u = 6$ S, 17°, 27′, 5″
Diftantia terrae a fole $c = 101045$
et $lc = 5,0045148$.

Ex tabulis igitur assignemus ad hoc tempus anomaliam mercurii mediam:

A. 1701	3 S, 4°, 2′, 0″
Anni: 10	5, 5, 36, 0
April.	0, 8, 18, 36
25 d	3, 12, 18, 30
23 h	3, 55, 19
35′, 7″	5, 59
	5 S, 4°, 10′, 25″

Est ergo $x = 154°, 16', 25''$. et sin. $x =$ sin. $25°, 43', 35''$, vnde inuenitur anomalia excentri v.

$$l \sin. x = 9,6375000$$
$$5,3719417$$
$$4,2655583$$

num: $= 18431'' = 5°, 7', 11''$

$$x = 154°, 16', 25$$
$$149°, 9', 14'' \mid 30°, 50', 46''$$

$$l \sin. = 9,7099000$$
$$5,3719417$$
$$4,3379583$$

num. $= 21775'' = 6°, 2', 55''$

$$x = 154°, 16', 25''$$
$$148°, 13', 30'' \mid 31°, 46', 30''$$

$$l \sin. = 9,7214684$$
$$5,3719417$$
$$5,3495267$$

num.

num. $= 22363'' = 6°, 12', 43''$
$x = 154°, 16', 25''$

$148°, 3', 42''$ | $31°, 56', 18''$

l sin. $= 9,7234607$
$5,3719417$

$4,3515190$

num. $= 22475'' = 6°, 14', 35''$
$x = 154°, 16', 25''$

$148°, 1', 50''$ | $31°, 58', 10''$

l sin. $= 9,7238388$
$5,3719417$

$4,3518971$

num. $= 22485'' = 6°, 14', 45''$
$x = 154°, 16', 25''$

$148°, 1', 40''$ | $31°, 58', 20''$

l sin. $= 9,7238726$
$5,3719417$

$4,3519309$

num. $= 22487'' = 6°, 14', 47''$
$x = 154°, 16', 25$

$v = 148°, 1', 38''$

Ergo anomalia excentri $v = 4S, 28°, 1', 38''$
et l sin. $v = 9,7238793$ et
l-cos. $v = 9,9285494$
$lak = 3,9014564$

$3,8300058$

$+ak \cos v = -\ 6761$
$a = 38710$
$y = 31949$ et $ly = 4,5044573$

lak fin. tot. $= 13,9014564$
$ly = 4,5044573$
$9,3969991$
$\frac{ak \text{ fin. tot.}}{y} = 24\ 94589$

Porro $l - \cos v = 9,9285494$
$la = 4,5878232$
$14,5163726$
$ly = 4,5044573$
$10,0119153$

$\frac{-a \cos v}{y} = 10278160$
$\frac{ak \text{ fin. tot.}}{y} = 2494589$
$\cos z = -7783571 = -$ fin. $51°, 6', 38''$

vnde $l - \cos z = 9,8911799$
Ergo $z = 4S, 21°, 6', 38''$
et l fin. $z = 9,7978349$

§. 79 Pergamus ad longitudinem mercurii a nodo, r definiendam:

$e = 6S, 28°, 16', 24''$
$z = 4S, 21°, 6', 38''$
$e + z = 11S, 19°, 23', 2''$
$l - \text{tang.}(e+z) = 9,2728529$
$l \cos n = 9,9968431$
$l \text{tang.} -r = 9,2096960$

Ergo

Ergo $r = 11\,S,\ 19^\circ,\ 27',\ 32''$
$q = 0\,S,\ 15^\circ,\ 42',\ 0''$

$r + q = 0\,S,\ 5^\circ,\ 9',\ 32''$
quae est longitudo mercurii heliocentrica.
Longitudo ☿ geocentrica $0\,S,\ 14^\circ,\ 28',\ 14''$
- - - - - - heliocentrica $0\,S,\ 5^\circ,\ 9',\ 32''$

$9^\circ,\ 18',\ 42''$
Ergo ad correctionem a lucis propagatione oriundam est
$q = \cos.\ 9^\circ,\ 18',\ 42''$
et $l\,q = 9,\,9942537$
$l\,\frac{c}{s} = 3,\,8140656$

$6,\,1801881$
$4,\,6855749$

$1,\,4946132$
Ergo $\frac{s}{c} = 31''$ et $-\frac{r}{c}\,m = 19''$. Ergo longitudo obseruata augeri debet $56''$, ita vt ea futura sit
$F = 0\,S,\ 14^\circ,\ 29',\ 4''$

§. 80. Latitudo heliocentrica s obtinebitur ad modum §. 59. ex aequatione $\sin.\ s = \sin.\ n.\ \sin\ (e + z)$
At est $l - \sin.\ (e + z) = 9,\,2653550$
$l\ \sin.\ n = 9,\,0796762$

$l - \sin.\ s = 8,\,3450312$
Ergo $s = -\ 1^\circ,\ 16',\ 5''$
Quare latitudo heliocentrica est australis, atque $= 1^\circ,\ 16',\ 5''$.

§. 81

§. 81. Ad locum geocentricum mercurii definiendum ſequamur operationes §. 60. inſtitutas.

$$
\begin{array}{rl}
u & = 6\,S.\ 17^{\circ},\ 27',\ 5'' \\
q+r & = 0\,S,\ \ 5^{\circ},\ \ 9',\ 32'' \\
\hline
u-q-r & = 6\,S,\ 12^{\circ},\ 17',\ 33''
\end{array}
$$

cot $(u-q-r) =$ tang. $77^{\circ}, 42', 27'' = 45893023$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Porro } l\,y & = 4,5044573 \\
l \cos s & = 9,9998937 \\
l-\sin.(u-q-r) & = 9,3281807 \\
\hline
 & 23,8325317 = l-y \cos. s \sin.(u-q-r) \\
lc\,(\sin.\ \text{tot.})^{2} & = 35,0045148 \\
\hline
 & 11,1719831 \\
\frac{-c}{y \cos. s \sin.\ (u-q-r)} & = 148587800 \\
\cot.\ (u-q-r) & = \ \ 45893023 \\
\hline
\cot.\ t & = 194480823 \\
l \cot.\ t & = 11,2888767 = l\,\text{tang. } 87^{\circ}, 3', 2''
\end{array}
$$

et $t = 2^{\circ}, 56', 58''$ vna cum 6 ſignis: ex quo ita longitudo geocentrica prodibit

$$
\begin{array}{rl}
u & = 6\,S,\ 17^{\circ},\ 27',\ 5'' \\
t & = 6\,S,\ \ 2^{\circ},\ 56',\ 58'' \\
\hline
u-t & = 0\,S,\ 14^{\circ},\ 30',\ 7'' = f.
\end{array}
$$

Haecque eſt longitudo geocentrica, quam tabulae praebent, quae cum obſeruata comparata dabit valorem ipſius df.

$$
\begin{array}{rl}
F & = 0\,S,\ 14^{\circ},\ 29',\ 4'' \\
f & = 0\,S,\ 14^{\circ},\ 30',\ 7'' \\
\hline
F-f & - = -1',\ 3'' = -63'' = df.
\end{array}
$$

qui eſt error tabularum in longitudine commiſſus. §.

§. 82. Latitudo geocentrica g ita inuenietur secundum §. 61.

$$
\begin{array}{lcl}
l-\text{sin.}\,t & = & 8,7114246 \\
l-\text{tang.}\,s & = & 8,3451375 \\
\hline
 & & 17,0565021 \\
l-\text{sin}\,(u-q-r) & = & 9,3281807 \\
\hline
l-\text{tang.}\,g & = & 7,7283214
\end{array}
$$

Ergo $g = -0^\circ, 18', 24''$ latitudo geocentrica
At est $G = -0^\circ, 18', 30''$ vnde

$G - g = dg = -6''$. error latitudinis.

§. 83. Definiamus nunc ordine valores differentiales dz, dr, ds, dj et dg, ac primum dz ad modum §. 63

$$
\begin{array}{lcl}
l\,a & = & 4,5878232 \\
l\,\text{sin.}\,z & = & 9,7978349 \\
\hline
 & & 14,3856581 \\
l\,y & = & 4,5044573 \\
\hline
 & & 9,8812008 \\
l\,\text{sin.}\,v & = & 9,7238793 \\
\hline
 & & 0,1573215 \\
\text{coeff.}\,dm & = & 1,4366 \\
l\,\frac{a\,\text{sin.}\,z}{y} & = & 9,8812008 \\
 & & 4,6855749 \\
\hline
 & & 5,1956259 \\
\text{num}: & = & 156901'' \\
l\,\text{sin.}\,z & = & 9,7978349
\end{array}
$$

$l\frac{1}{1-kk} = 0,0188112$

$9,8100461$
$4,6855749$

$5,1310712$

num : $= 135229''$
156901

$292130'' =$ coeff. $-dk$

Ergo $dz = 1,4366.\, dm - 292130''.\, dk$

$l\, 1,4366 = 0,1573215$
$l\, 292130'' = 5,4655762$

Atque vt hactenus manet:

$de = 1,0040.\, dp - 1,0040.\, dq + 0,0505.\, dn$
$l\, 1,0040 = 0,0017489$
$l\, 0,0505 = (-2),7031448$

§. 84. Definiatur nunc differentialis dr valor

$l - \text{tang}\ (e+z) = 9,2728529$
$l\ \text{fin.}\ n = 9,0796762$
$l\,(\text{cof.}\ r)^2 = 19,9852164$

$38,3377455 - 40$

l coeff. $dn = (-2),3377455$
coeff. $dn = 0,02176$

$l\ \text{cof.}\ n = 9,9968431$
$l\,(\text{cof.}\ r)^2 = 19,9852164$

$29,9820595$

$l\,(\text{cof.}\,(e+z))^2 = 19,9850042$
l coeff. $de + dz = (-1),9970553$ hincque

dr

$dr = 1,4268 . dm - 290156 . dk + 0,9974 . dp$
$- 0,9974 . dq + 0,0719 . dn$

$l\,1,4268 = 0,1543768$
$l\,290156 = 5,4626315$
$l\,0,9974 = (-1),9988042$
$l\,0,0719 = (-2),8567289$

Porro l-sin. $(e+z) = 9,2653550$
l cos. $n = 9,9968431$

$19,2621981$
l cos. $s = 9,9998937$

l coeff. $-dn = (-1),2623044$
coeff. $-dn = 0,1829$

l cos. $(e+z) = 9,9925021$
l sin. $n = 9,0796762$

$19,0721783$
l cos. $s = 9,9998937$

l coeff. $de+dz = (-1),0722846$ hincque
$ds = 0,16967 . dm - 34503 . dk + 0,1186 . dp$
$- 0,1186 . dq - 0,1770 . dn$

$l\,0,16967 = (-1),2296061$
$l\,34503 = 4,5378608$
$l\,0,1186 = (-1),0740335$
$l\,0,1770 = (-1),2479733$.

§. 85. His praeparatis quaeramus valorem ipsius df

$l\,(\text{sin. } b)^2 = 17,4228492$
$l\,(\text{sin } (u\text{-}q\text{-}r))^2 = 18,6563614$

l coeff. $dq + dr = (-2),7664878$

coeff.

$$\text{coeff } dq + dr = 0,05841$$

$$l\,a = 4,5878232$$
$$l\,c = 5,0045148$$
$$l - \text{cos. } z = 9,8911799$$
$$l\,(\text{sin. } t)^2 = 17,4228492$$

$$36,9063671$$
$$l\,y = 4,5044573$$

$$32,4019098$$
$$l\text{-}y \text{ cos. } s \text{ sin. } (u\text{-}q\text{-}r) = 23,8325317$$

$$8,5693781$$
$$4,6855749$$

$$l \text{ coeff.} + dk = 3,8838032$$
$$\text{coeff.} + dk = 7653$$

$$l\,ac\,(\text{sin. } t)^2 = 27,0151872$$
$$l\,ak = 3,9014564$$
$$l \text{ sin. } v = 9,7238793$$

$$40,6405229$$
$$l\,y^2 = 9,0080146$$

$$31,0310083$$
$$l\text{-}y \text{ cos. } s \text{ sin. } (u\text{-}q\text{-}r) = 23,8325317 + 10$$

$$l \text{ coeff.} + dm = (\text{-}3),7990766$$
$$\text{coeff.} + dm = 0,0063$$

$$l\,c = 5,0045148$$
$$l - \text{tang. } s = 8,3451375$$

l sin.

$$l(\text{fin. } t)^2 = 17,4228492$$

$$30,7725015$$

$$l\text{-}y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u\text{-}q\text{-}r) = 23,8325317 + 10$$

$$l \text{ coeff. } - ds = (-4),9399098$$

$$l\,c\,(\text{fin } t)^2 = 22,4273640$$
$$l \text{ cot. } (u\text{-}q\text{-}r) = 10,6617465$$

$$33,0891105$$

$$l\text{-}y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u\text{-}q\text{-}r) = 23,8325317 + 10$$

$$l \text{ coeff. } + dq + dr = (-1),2565788$$
$$\text{coeff. } + dq + dr = 0,14055$$
$$0,05841$$

$$\text{coeff. } + dq + dr = 0,23896 : \text{log.} = (-1),3783252$$

Ex his inuenitur:

$$dj = -63'' = 0,3471.dm - 60074''.dk + 0,2382.dp$$
$$+ 0,00056.dq + 0,01733.dn$$

§. 86. Reftat vt dg definiamus fecundum §. 68.

$$l(\text{cof. } g)^2 = 19,9999876$$
$$l - \text{fin. } t = 8,7114246$$

$$28,7114122$$

$$l(\text{cof. } s)^2 = 19,9997874$$

$$8,7116248$$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = 9,3281807$$

$$l \text{ coeff. } + ds = (-1),3834441$$

$$l(\text{cof. } g)^2 = 19,9999876$$

$l-$

$$
\begin{array}{rl}
l-\text{tang.}\,s = & 8,3451375 \\
l-\text{cof.}\,t = & \underline{9,9994244} \\
 & 38,3445495 \\
l-\text{fin.}(u-q-r) = & \underline{9,3281807} + 30 \\
l\ \text{coeff.} + df = & (-1),0163688 \\
\text{coeff.} + df = & 0,10384
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
l(\text{cof.}\,g)^2 - \text{tang.}\,s = & 28,3451251 \\
l-\text{fin.}\,t = & \underline{8,7114246} \\
 & 37,0565497 \\
l-\text{fin.}\,(u-q-r) = & \underline{9,32818\ 7} \\
 & 27,7283690 \\
l\,\text{cot.}\,(u-q-r) = & \underline{10,6617465} \\
l\ \text{coeff:} - dq - dr = & (-2),3901155 \\
\text{coeff:} - dq - dr = & 0,02455 \ \text{hincque}
\end{array}
$$

$$dg = -6''\ 0,10384.df + 0,006.dm - 1219''.dk$$
$$+ 0,0042.dp - 0,0287.dq - 0,0445.dn$$

atque loco df reftituto valore $63''$ prodibit

$$0 = 0,006.\,dm - 1219''.\,dk + 0,0042.\,dp$$
$$- 0,0287.\,dq - 0,0445.\,dn$$

§. 87. Ex his igitur tribus obferuationibus, earumque cum tabulis comparatione affecuti fumus fequentes fex aequationes:

I. $-264'' = 0,1902.dm - 68035''.dk + 0,1273.dp$
$- 0,0001.\,dq + 0,0479.\,dn$

II. $20'' = 0,01062.\,dm - 4491''.dk + 0,01104.\,dp$
$- 0,01098.dq - 0,3480.dn$

III.

III. $-5''=0,1294.dm+58612''.dk+0,0670.dp$
$-0,00028.dq-0,0019.dn$

IV. $-70''=0,0539.dm-6158''.dk+0,0357.dp$
$-0,0361.dq+0,03708.dn$

V. $-63''=0,3471.dm-60074''.dk+0,2382.dp$
$+0,00056.dq+0,01733.dn$

VI. $0=0,006.dm-1219''.dk+0,0042.dp$
$-0,0287.dq-0,0445.dn.$

inter quas aequationes quarta nobis aliquantum ſuſpecta eſſe debet, eo quod orta eſt ex diſcrimine latitudinis obſeruatae, et per tabulas inuentae, ſatis enormi ſcilicet $70''$: quamobrem reliquis quinque aequationibus vti conueniet. Vltima autem aequatio praebet:

$$dm=203166''.dk-0,7.dp+4,783.dq+7,416.dn$$

quae in prima ſubſtituta dat hanc:

$$-264''=-29393''.dk-0,0058dp+0,9096.dq+1,4585.dn$$

ex qua deducitur

$$dn=-181''+20153''.dk+0,00398\,dp-0,62363dq$$

et

$$dm=-1342''+352622''.dk-0,67dp+0,158\,dq$$

Hi valores in aequatione ſecunda ſubſtituti dabunt

$$dq=-148''+39647''.dk-0,01277.dp$$
$$dn=-89''-4572''.dk+0,01194.dp$$
$$dm=-1365''+358886.dk-0,67202.dp$$

In ſubſidium vocentur aequationes tertia et quinta, atque habebitur

$$0=-177''+105050''.dk+0,01968.dp$$

et

$$0=-410''+64439''.dk+0,00518.dp$$

ex quibus ſi eliminetur dp, deducetur

dk

$dk = \frac{1271}{349918} = 0,003635$

hincque retrogrediendo obtinebitur

$dp = 10417'' = 2°, 53', 37''$

$dm = -7061'' = -1°, 57', 40''$

$dq = -137'' = - \quad 2', 17''$

$dn = \quad 19'' = + \quad 19''$

§. 88. His igitur correctionibus inuentis Tabulae mercurii sequenti modo se habebunt. Primo scilicet tabula motus medii mercurii, quam assumsimus, vsurpari poterit, verum ab anomalia media ad quoduis tempus ex his tabulis inuenta constanter subtrahi debet 1°, 57', 40'', ita vt ad initium huius seculi A. 1701 pro meridiano Londinensi fuerit anomalia media mercurii 8 S, 2°, 4', 20''. Secundo excentricitas orbitae mercurii vera excedit eam, quae in tabulis est assumta, eritque ea $= \frac{209524}{1000000}$ atque huius excentricitatis logarithmus est $= (-1), 3212338$. Tertio longitudo aphelii a prima stella arietis erit $=$ 7 S, 16°, 41', 37''. Quarto longitudo nodi ascendentis ab eodem termino est $=$ 0 S, 15°, 39'. 43''; et quinto inclinatio orbitae $= 6°, 54', 19''$.

§. 89. Cum nunc hae tabulae correctae cum veritate exactissime consentire debeant, si quidem obseruationes, quibus sum vsus, summa cura sint factae; earum ope ad quod vis tempus locus mercurii verus poterit assignari, isque adeo geocentricus, si tabulae solares supra correctae simul adhibeantur. Quo igitur certitudo harum tabularum tam mercurii, quam solis ad obseruationes examinari queat, inuestigabo per illas transitum mercurii per solem, qui huius anni mense Aprili intra dies 21 et 22 con-

contingere debet: quem in finem ante omnia tam loca ſolis quam mercurii ad meridiem vtriusque diei determinari oportet, vt quo inter illos meridies momento tranſitus mercurii per ſolem celebretur, colligi queat: computabo autem haec loca ad tempus medium pro meridiano Londinenſi, quia inde concluſio ad quascunque regiones transferri poteſt.

§. 90. Incipiamus a loco ſolis, quem ad meridiem cum diei 21 tum 22 Aprilis huius anni 1740 quaeramus, qui annus cum ſit biſextilis, dies computari debent 22 et 23. Erit igitur

	Anomalia media ſolis			
A. 1721 .	6 S,	13°,	10′,	14″
Anni 19 .	11,	29,	8,	24
April. d. 22 .	3,	20,	23,	18
	10,	2°,	41′,	56″
			59′,	8″
April. d. 23.	10,	3°,	41′,	4″

Erit ergo pro meridiano Londinenſi et ſtilo veteri

A. 1740	Anomalia media terrae
meridie Aprilis 21	10 S, 2°, 41′, 56″
meridie Aprilis 22	10 S, 3, 41, 4

Ad has anomalias medias quaerantur iam anomaliae excentri per excentricitatem orbitae terrae correctam methodo ſupra tradita. Priore nempe die erit $x = 10$ S, 2°, 41′, 56″, atque ſin. $x = -$ ſin. 57°, 18′, 4″, vnde ſequens orietur calculus:

 $l - x$

$l - x = 9,\ 9250651$
ſubtr. $6,\ 4583825$

$3,\ 4006826$
num. $2929'' = 48',\ 49''$
addatur $x = 10\,S,\ 2^\circ,\ 41'\ 56''$

$10\,S,\ 3^\circ,\ 30',\ 45''$
ab $12\,S$

$56^\circ,\ 29',\ 15''$
l – ſin. $= 9,\ 9210438$
ſubtr. $6,\ 4583825$

$3,\ 4626613$
num. $2902'' = 48',\ 22''$
$x = 10\,S,\ 2^\circ,\ 41',\ 56''$

$v = 10\,S,\ 3^\circ\ 30',\ 19''$ anomalia excentri.

Pro ſequente meridie eſt $x = 10\,S,\ 3^\circ,\ 41',\ 4''$, et ſin. $x = -$ ſin. $56^\circ,\ 18',\ 56''$

l – ſin. $x = 9,\ 9201836$
$6,\ 4583825$

$3,\ 4618011$
num. $2896'' = 48',\ 16''$
$x = 10\,S,\ 3^\circ,\ 41',\ 4''$

$10\,S,\ 4^\circ,\ 29',\ 20''$
ab $12\,S$

$55^\circ,\ 30',\ 40''$
l – ſin. $= 9,\ 9160516$

6,

$$\begin{array}{r} 6,\ 4583825 \\ \hline 3,\ 4576691 \end{array}$$

$$\text{num. } 2868'' = 47', 48''$$
$$x = 10\,S, 3^\circ, 41', \ 4''$$
$$\begin{array}{r} \hline 10\,S, 4^\circ, 28', 52'' \\ 12\,S \\ \hline 55^\circ, 31', \ 8'' \end{array}$$

$$l - \text{sin.} = 9,\ 9160900$$
$$\begin{array}{r} 6,\ 4583825 \\ \hline 3,\ 4577075 \end{array}$$

$$\text{num. } 2869'' = 47', 49''$$
$$x = 10\,S, 3^\circ, 41', \ 4''$$
$$\overline{v = 10\,S, 4^\circ, 28', 53''} \text{ Anomalia excentri.}$$

§. 91. Hinc ad haec tempora reperitur diſtantia terrae a ſole $y = a + k\ a$ coſ. v. At eſt pro priore meridie coſ. $v =$ coſ. $56^\circ, 29', 41'' =$ ſin. $33^\circ, 30', 19''$;
pro poſteriore meridie vero coſ. $v =$ coſ. $55^\circ, 31', 7'' =$ ſin. $34^\circ, 28', 53''$.

Pro priore meridie

$$l \text{ coſ } v = 9,\ 7419500$$
$$\begin{array}{r} l\,k\,a = 3,\ 2271923 \\ \hline 2,\ 9691423 \end{array}$$

num. $= 931$.

Ergo diſtantia terrae a ſole $y = 100931$

et $l\,y = 5,\ 0040203$

Pro altero meridie

$$
\begin{array}{rcl}
l \text{ cos. } v & = & 9,\ 7529228 \\
l\ k\ a & = & 3,\ 2271923 \\
\hline
 & & 2,\ 9801151
\end{array}
$$

numerus $= 955$.

Ergo diſtantia terrae a ſole $y = 100955$

et $l\,y = 5,\ 0041278$

§. 92. Anomalia vera z reperietur ex hac aequatione cos. $z = \frac{ka\ \text{sin. tot.}}{y} + \frac{a\ \text{cos. } v}{y}$

Ergo pro priore meridie

$$
\begin{array}{rcl}
l\ k\ a \text{ sin. tot.} & = & 13,\ 2271923 \\
l\ y & = & 5,\ 0040203 \\
\hline
 & & 8,\ 2231720
\end{array}
$$

num. $= 167175$

$$
\begin{array}{rcl}
l \text{ cos. } v & = & 9,\ 7419500 \\
l\ a & = & 5,\ 0000000 \\
\hline
 & & 14,\ 7419500 \\
l\ y & = & 5,\ 0040203 \\
\hline
 & & 9,\ 7379297 \\
\text{num.} & = & 5469274 \\
 & & \ \ 167175 \\
\hline
\end{array}
$$

cos. $z = 5636449 =$ ſin. $34^\circ,\ 18',\ 29''$

Ergo $z = 10\ S,\ 4^\circ,\ 18',\ 29''$

addatur $p = 8\ S,\ \ 8,\ 25,\ 42$

longitudo terrae $= 6\ S,\ 12^\circ,\ 44',\ 11''$ a prima ſtella arietis, hinc longitudo ſolis $= 0\ S,\ 12^\circ,\ 44',\ 11''$ vera

ob

ob lucis propogationem ſubtr. 20″ hinc
longitudo ſolis apparens $= 0\,S, 12°, 43', 51''$

Pro meridie ſequente.

$$lka \text{ ſin. tot.} = 13,\ 2271923$$
$$ly = \underline{5,\ 0041278}$$
$$8,\ 2230645$$
$$\text{numerus} = 167134$$

$$l\,\text{coſ.}\,v = 9,7529228$$
$$l\tfrac{y}{a} = \underline{0,0041278}$$
$$9,7487950$$
$$\text{num:} = 5607833$$
$$\underline{167134}$$
$$\text{coſ.}\ z = 5774967 = \text{ſin.}\ 35°, 16', 29''$$

Ergo z	$=$	10 S,	5°,	16′,	29″
addatur p	$=$	8,	8,	25,	42
longitudo terrae $=$		6 S,	13°,	42′,	11″

hinc longitudo ſolis $= 0\,S, 13°, 42', 11''$ vera
ob lucis propagationem ſubtr. 20″
longitudo ſolis $= 0\,S, 13°, 41', 51''$ apparens

§. 93. Definitis locis ſolis progrediamur ad mercurii loca inueſtiganda, ac primo quidem anomaliae mediae ita prodibunt ex tabulis correctis.

A. 1721	8 S, 16° 34′, 20″	
19	10 , 16′, 42 , 21	
April.	0, 8 , 18 , 36	
	7 S, 11°, 35′, 17″	
d. 22	3, 0 , 14 , 53	
	10 S, 11 , 50′, 10″	Anom. media
d. 23	3, 4, 7′, 25	
	10 S, 15 , 42 , 42	Anom. media

Pro priore meridie erit ergo $x = 10\,S, 11°, 50', 10''$ et fin. $x = -$ fin. $48°, 9', 50''$
pro fequente vero meridie $x = 10\,S, 15°, 42', 42''$ et fin. $x = -$ fin. $44°, 17', 18''$
Hinc reperietur anomalia excentri fequenti modo pro priore meridie.

$l -$ fin. $x = 9, 8721888$
fubtr. $5, 3643411$
$4, 5078477$
num : $= 32199'' = 8°, 56', 39''$
$x =$ $10\,S, 11°, 50', 10''$
$10\,S, 20°, 46', 49''$
ab $12\,S$
$39°, 13', 11''$
$-$ fin. $= 9, 8009204$
$5, 3643411$
$4, 4365793$

num :

num. $= 27326'' = 7^\circ, 35', 26''$

$x =$ 10 S, 11, 50, 10

10 S, $19^\circ, 25', 36''$

ab 12 S

$40^\circ, 34', 24''$

l - sin. $= 9,8131944$

$5,3643411$

$4,4488533$

num. $= 28110'' = 7^\circ, 48', 30''$

$x =$ 10 S, 11, 50, 10

10 S, $19^\circ, 38', 40''$

ab 12 S

$40^\circ, 21', 20''$

l - sin. $= 9,8112592$

$5,3643411$

$4,4469181$

num. $= 27984'' = 7^\circ, 46', 24''$

$x =$ 10 S 11, 50, 10

10 S, $19^\circ, 36', 34''$

ab 12

$40^\circ, 23', 26''$

l - sin. $= 9,8115712$

$5,3643411$

$4,4472301$

num.

num. $= 28005'' = 7^\circ, 46', 45''$

$$\begin{array}{rl} x = & 10\,S, 11, 50, 10 \\ \hline & 10\,S, 19^\circ, 36', 55'' \\ \text{ab} & 12\,S \\ \hline & 40^\circ, 23', 5'' \end{array}$$

l – sin. $= 9,8115193$

$$\begin{array}{r} 5,3643411 \\ \hline 4,4471782 \end{array}$$

num: $= 28001'' = 7^\circ, 46', 41''$

$$\begin{array}{rl} x = & 10\,S, 11, 50, 10 \\ \hline & 10\,S, 19, 36, 51'' \\ \text{ab} & 12\,S \\ \hline & 40^\circ, 23', 9'' \end{array}$$

l – sin. $= 9,8115288$

$$\begin{array}{r} 5,3643411 \\ \hline 4,4471877 \end{array}$$

num: $= 28002'' = 7^\circ, 46', 42''$

$$\begin{array}{rl} x = & 10\,S, 11, 50, 10 \\ \hline v = & 10\,S, 19^\circ, 36', 52'' \end{array}$$ anomalia excentri

Pro sequente meridie

assumatur prior differentia $7^\circ, 46', 42''$

$$\begin{array}{rl} x = & 10\,S, 15, 42, 42 \\ \hline & 10\,S, 23^\circ, 29', 24'' \\ \text{ab} & 12\,S \\ \hline & 36^\circ, 30', 36'' \end{array}$$

l – sin.

$l -$ fin. $= 9,7744899$

$5,3643411$

$4,4101488$

num. $25712'' = 7^\circ, 8', 32''$

$x = 10S, 15, 42, 42$

$10S, 22^\circ, 51', 14''$

ab $12S$

$37^\circ, 8', 46''$

$l -$ fin. $= 9,7806760$

$5,3643411$

$4,4163349$

num. $= 26081'' = 7^\circ, 14', 41''$

$x = 10S, 15, 42, 42$

$10S, 22, 57, 23''$

ab $12S$

$37^\circ\ 2'\ 37''$

$-$ fin. $= 9,7799013$

$5,3643411$

$4,4155602$

num. $= 26035'' = 7^\circ, 13', 55''$

$x = 10S, 15, 42, 42$

$10S, 22^\circ, 56', 37''$

ab $12S$

$37^\circ, 3', 23''$

$l -$ fin. $= 9,7800296$

$5,3643411$

$4,4156885$

num. $= 26043'' = 7°, 14', 3''$

$x = 10S, 15, 42, 42$

$\overline{10S, 22°, 56', 45''}$

ab $12S$

$\overline{37°, 3', 15''}$

l — fin. $= 9,7800073$

$5,3643411$

$\overline{4,4156662}$

num. $= 26042'' = 7°, 14', 2''$

$x = 10S, 15, 42, 42$

$\overline{v = 10S, 22°, 56', 44''}$ anomalia excentri

§. 94. Ex anomalia excentri reperietur primo distantia mercurii a sole $y = a + ka$ cos. v

Pro priore meridie

cos. $v =$ fin. $49°, 36', 52''$

$la = 4,5878232$

$lk = (-1), 3212338$

$\overline{lka = 3,9090570}$

l cos. $v = 9,8817849$

$\overline{3,7908419}$

ka cos. $v = 6178$

$a = 38710$

$\overline{y = 44888}$ distantia Mercurii a sole

$ly = 4,6521303$

Pro sequente meridie

cos. $v =$ fin. $52°, 56', 44''$

$lka = 3,9090570$

l cos.

$l\,\text{cof.}\,v = 9,9020390$

$3,8110960$

$ka\,\text{cof.}\,v = 6472$

$a = 38710$

$y = 45182$ diſtantia Mercurii a ſole

$ly = 4,6549654$

§. 95. Nunc reperietur anomalia vera z ex hac aequatione $\text{cof.}\,z = \frac{ka\,\text{ſin. tot.}}{y} + \frac{a\,\text{cof.}\,v}{y}$

Pro priore meridie

$l\,ka\,\text{ſin. tot.} = 13,9090570$

$ly = 4,6521303$

$9,2569267$

$\frac{ka\,\text{ſin. tot.}}{y} = 1806869$

$la = 4,5878232$

$l\,\text{cof.}\,v = 9,8817849$

$14,4696081$

$ly = 4,6521303$

$9,8174778$

$\frac{a\,\text{cof.}\,v}{y} = 6568676$

1806869

$\text{cof.}\,z = 8375545 = \text{ſin.}\ 56^\circ, 52', 57''$

Ergo $z = 10S, 26^\circ, 52', 57''$ anomalia vera

Pro ſequente meridie

$l\,ka\ \text{ſin. tot.} = 13,9090570$

$ly = 4,6549654$

$9,2540916$

$\frac{ka\,\text{ſin. tot.}}{y} = 1795113$

 $la =$

$$
\begin{array}{ll}
l\,a = & 4,5878232 \\
l\,\text{cos}.\,v. = & 9,9020390 \\
\hline
 & 14,4898622 \\
l\,y = & 4,6549654 \\
\hline
 & 9,8348968 \\
\frac{a \cos v}{y} = & 6837492 \\
 & 1795113 \\
\hline
\text{cos}.\,z = & 8632605 = \text{sin}.\,59^{\circ},\,41',\,5''
\end{array}
$$

Ergo $z = 10\,S,\ 29^{\circ},\ 41',\ 5''$ Anomalia vera.

§. 96. Antequam vlterius progrediamur, necesse est vt in distantiam aphelii a nodo ascendente inquiramus, quae posita est $= e$, et ex hac aequatione inuenitur.
tang. $e = \frac{\text{tang}.\,(p-q)}{\text{cos}.\,n}$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Est vero } p = & 7S,\ 16^{\circ},\ 41',\ 37'' \\
q = & 0S,\ 15^{\circ},\ 39',\ 43'' \\
\hline
p-q = & 7S,\ \ 1^{\circ},\ \ 1',\ 54'' \\
n = & 6^{\circ},\ 54',\ 19''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{tang}.\,(p-q) = & \text{tang}.\ 31^{\circ},\ 1',\ 54'' \\
l\ \text{tang}.\ (p-q) = & 9,7793173 \\
l\ \text{cos}.\,n = & 9,9968382 \\
\hline
l\,\text{tang}.\,e = & 9,7824791 = l\,\text{tang}.\ 31^{\circ},\ 12',\ 58''
\end{array}
$$

Ergo $e = 7S,\ 1^{\circ},\ 12',\ 58''$
Hicque valor est constans, et pro omni tempore idem manet.

§. 97. Sequitur iam determinanda longitudo mercurii a nodo ascendente r per hanc aequationem:

tang. $r = $ cos. n tang. $(e+z)$

Pro-

Pro priore meridie

$e = 7S, \ 1^\circ, \ 12', \ 58''$
$z = 10S, \ 26^\circ, \ 52', \ 57''$

$e+z = 5S, \ 28^\circ, \ 5', \ 55''$
$\text{tang.}\ (e+z) = -\ \text{tang.}\ 1^\circ, \ 54', \ 5''$
$l - \text{tang.}\ (e+z) = 8, 5211068$
$l\ \text{cos.}\ n = 9, 9968382$

$l - \text{tang.}\ r = 8, 5179450 = l\ \text{tang.}\ 1^\circ, 53', 15''$

Ergo $r = 5S, \ 28^\circ, \ 6', \ 45''$

Pro sequente meridie

$e = 7S, \ 1^\circ, \ 12', \ 58''$
$z = 10S, \ 29^\circ, \ 41', \ 5''$

$e+z = 6S, \ 0^\circ, \ 54', \ 3''$
$l\ \text{tang.}\ (e+z) = 8, 1965556$
$l\ \text{cos.}\ n = 9, 9968382$

$l\ \text{tang.}\ r = 8, 1933938 = l\ \text{tang.}\ 0^\circ, \ 53', \ 39''$

Ergo $r = 6S, \ 0^\circ, \ 53', \ 39''$

§. 98. Quod si ad longitudinem mercurii a nodo r addatur longitudo nodi a prima stella arietis q, obtinebitur mercurii longitudo heliocentrica a prima stella arietis.

Pro primo meridie

$q = 0S, \ 15^\circ, \ 39', \ 43''$
$r = 5S, \ 28^\circ, \ 6', \ 45''$

longitudo $= 6S, \ 13^\circ, \ 46', \ 28''$ mercurii heliocentrica.

Pro altero meridie

$q = 0S, \ 15^\circ, \ 39', \ 43''$
$r = 6S, \ 0^\circ, \ 53', \ 39''$

longitudo $= 6S, \ 16^\circ, \ 33', \ 22''$ mercurii heliocentrica.

Latitudo autem heliocentrica ad boream respiciens s inuenietur ex hac aequatione $\sin s = \sin. n \sin (e+z)$ Quare erit

Pro meridie priore.

$$\sin (e+z) = \sin. 1^{\circ}, 54', 5''$$
$$l \sin. (e+z) = 8,5208680$$
$$l \sin. n = 9,0800068$$
$$l \sin. s = 7,6008748 = l \sin. 0^{\circ}, 13', 43''$$

Ergo $s = 0^{\circ}, 13', 43''$ latitudo heliocentrica.

Pro meridie sequente.

$$\sin. (e+z) = - \sin. 0^{\circ}, 54', 3''$$
$$l - \sin. (e+z) = 8,1965020$$
$$l \sin. n = 9,0800068$$
$$l - \sin. s = 7,2765088 = l \sin. 0^{\circ}, 6', 30''$$

Ergo $s = -0^{\circ}, 6', 30''$, latitudo heliocentrica australis.

§. 99. Inuentis mercurii locis heliocentricis, pergo ad eius loca geocentrica definienda. Ac primo quidem pro meridie priore erit

Distantia terrae a sole $c = 100931$

et $l c = 5,0040203$

longitudo terrae $u = 6 S, 12^{\circ}, 44', 11''$.

Nunc angulus quaeratur p T V $= t$, ex aequatione

$$\cot. t = \cot. (u-q-r) - \frac{c}{y \cos. s \sin. (u-q-r)}$$

cum autem sit $u = 6 S, 12^{\circ}, 44', 11''$

subtrahatur $q + r = 6 S, 13^{\circ}, 46', 28''$

erit $u - q - r = 11 S, 28^{\circ}, 57', 43''$

$\tan g. (u-q-r) = - \tan g. 1^{\circ}, 2', 17''$

sin.

fin. $(u-q-r) = -$ fin. $1^\circ, 2', 17''$
cot. $(u-q-r) = - 551919660$

$lc = 5,0040203$
$ly = 4,6521303$

$30,3518900$

l cof. $s = 9,9999965$

$20,3518935$

l fin. $(u-q-r) = 8,2580776$

$12,0938159$

$-\frac{c}{y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u-q-r)} = 1241126000$
$- \quad 551919660$

cot. $t \quad - \quad 689206340 =$ tang. $89^\circ, 10', 7''$

Ergo $t = 6\,S, 0^\circ, 49', 53''$

Pro fequente meridie

Diftantia terrae a fole $c = 100955$
et $lc = 5,0041278$

Longitudo terrae $u = 6\,S, 13^\circ, 42', 11''$
fubtr. $q + r = 6\,S, 16^\circ, 33', 22''$

$u-q-r = 11\,S, 27^\circ, 8', 49''$

cot. $(u-q-r) = -$ tang. $87^\circ, 8', 49''$
fin. $(u-q-r) = -$ fin. $2^\circ, 51', 11''$
cot. $(u-q-r) = - \quad 200657567$

$lc = 5,0041278$
$ly = 4,6549654$

$30,3491624$

cof.

l cos. $s = 9,9999992$

$20,3491632$

l-sin.$(u-q-r)$ $8,6970069$

$11,6521563$

$- \frac{c}{y \cos. s \sin. (u-q-r)} = - 448907000$

$- 200657567$

cot. $t = 248249433 =$ tang. $87^\circ, 41', 35''$.

Ergo $t = 6$ S, $2^\circ, 18', 25''$

§. 100. Ex his reperitur longitudo mercurii geocentrica $= u - t$. Quare erit

Pro priori meridie

$u = 6$S, $12^\circ, 44', 11''$

$t = 6$S, $0^\circ, 49', 53''$

u-$t = 0$S, $11^\circ, 54', 18''$ quae est longitudo mercurii geocentrica a prima stella arietis.

Pro sequenti meridie

$u = 6$ S, $13^\circ, 42', 11''$

$t = 6$ S, $2^\circ, 18', 25''$

$u - t = 0$ S, $11^\circ, 23, 46''$ quae est longitudo mercurii geocentrica.

Latitudo autem geocentrica g, orietur ex hac aequatione tang. $g = \frac{\sin. t. \tan g. s}{\sin. (u-q-r)}$

Ergo pro priori meridie

$l -$ sin. $t = 8,1616658$

l tang. $s = 7,6008779$

$15,7625437$

$l -$

l - fin. $(u - q - r) = 8,2580776$

l tang. $g = 7,4044061 = l$ tang. $0°, 8', 44''$.

Ergo latitudo geocentrica $= 0°\ 8', 44''$ Borealis

pro altero meridie

l - fin. $t = 8,6047970$

l - tang. $s = 7,2765095$

$15,8813065$

l - fin. $(u - q\ r) = 8,6970069$

l - tang. $g = 7,1842996 = l$ - tang, $0°, 5', 15''$

Ergo latitudo geocentrica $= 0°, 5', 15''$ Auſtralis.

§. 101. Longitudines iſtae inuentae geocentricae ſunt verae, in quibus mercurius conſpiceretur, ſi lumen in inſtanti propagaretur: quamobrem eae ad longitudines apparentes per ſequentem aequationem reducentur.

Pro primo meridie

longitudo ☿ geocentrica $= 0S, 11°, 54', 18''$

longitudo ☿ heliocentrica $= 6S, 13°, 46', 28''$

$6S,\ 1°, 52', 10''$

l - coſ. $1°, 52' = l - q = 9,9997720$

$l \frac{c}{s} = 3\ 8140656$

$6,1857064$

$4,6855749$

$1,5001315$

Ergo $\frac{s}{c} q = - 32''$

longitudo ☿ geocentrica $= 0S, 11^\circ, 54', 18''$
longitudo terrae $6S, 12^\circ, 44', 11''$

$6S, 0^\circ, 49', 53$

l - cos. $0^\circ, 50' = l \cdot m = 9,9999541$
$l\frac{c}{r} = 4,0201540$

$5,9798001$
$4,6855749$

$1,2942252$

Ergo $-\frac{r}{c}m = 20''$
$+\frac{s}{c}q = -32''$

Aequatio $= -12''$

quae $12''$ a longitudine obseruata subtrahi deberent; et hanc obrem ad longitudinem veram mercurii addi debebunt. Quocirca priori meridie fuit apparens mercurii longitudo $= 0S, 11^\circ, 54', 30''$.

Pro sequente meridie

longitudo ☿ geocentrica $= 0S, 11^\circ, 23', 46''$
longitudo ☿ heliocentrica $= 6S, 16^\circ, 33', 22''$

Differentia $= 6S, 5^\circ, 9', 36''$

l cos. diff. $= l \cdot q = 9,9982433$
$l\frac{c}{s} = 3,8140656$

$6,1841777$
$4,6855749$

$1,4986028$

$\frac{s}{r}q = -31'',5$

longi-

longitudo ☿ geocentrica = 0 S, 11°, 23′, 46″
longitudo terrae = 6 S, 13°, 42′, 11″

Diff. 6 S, 2°, 18′, 25″

l cos. diff $= l - m = 9,9996500$

$l\frac{c}{r} = 4,0201540$

5,9794960
4,6855749

1,2939211

Ergo $-\frac{r}{c}m = + 19'' 6$
$+\frac{s}{c}q = - 31'', 5$

Aequatio $= - 12''$

Longitudo ergo geocentrica inuenta augeri debebit 12″, vnde longitudo mercurii apparens pro sequente meridie prodibit = 0 S, 11°, 23′, 58″

§. 102. His inuentis erit ad meridiem diei 21 Aprilis A. 1740 tempore medio sub meridiano Londinensi, vt sequitur.

Longitudo solis apparens 0 S, 12°, 43′, 51″
Longitudo ☿ geocentrica 0 S, 11°, 54′, 30″
Latitudo mercurii geocentrica 0°, 8′, 44″ Borealis.

At ad meridiem diei sequentis, qui est 22 Aprilis tempore medio sub meridiano Londinensi pariter erit

Longitudo solis apparens 0 S, 13°, 41′, 51″
Longitudo ☿ geocentrica 0 S, 11°, 23′, 58″
Latitudo ☿ geocentrica 0°, 5′, 15″ australis.

Vt inueniatur tempus coniunctionis ☉ et ☿, quo longitudines vtriusque fient aequales, apparet primum coniunctionem ante meridiem diei 21 Aprilis contingere debere.

Namque excessus longitudinis solis super longitudinem mercurii illo meridie est $49'$, $21''$, sequenti vero meridie est excessus $2°$, $17'$, $83''$. Tempore ergo 24 horarum mercurius a sole secundum longitudinem recedit per $1°$, $28'$, 32. Hinc inueniri poterit tempus ante meridiem diei 21 Aprilis, quo ☿ a sole per spatium $49'$, $21''$ iam recessit per regulam auream

$$1°, 28', 32'' : 24^h = 49', 21'' : 13^h, 22'$$

sub meridiano Londinensi ergo coniunctio ☿ cum sole continget Aprilis die $20 : 10^h$, $38'$ ideoque nocte cum sol iam occidit, ex quo haec coniunctio Londini non erit conspicua. Hic autem Petropoli haec coniunctio incidet in diem 21 Aprilis mane 0^h. $58'$, hoc est mox post mediam noctem, tempore ciuili. Verum Obdorae, quo Cel. De l'Isle Noster huius coniunctionis caussa est profectus, haec coniunctio incidet in eundem diem 21 Aprilis secundum tempus ciuile mane 3^h, $18'$ quo tempore isto loco sol iam supra horizontem versatur: ita vt ista coniunctio Obdorae conspicua esse debeat.

§. 103. Videamus iam, an in hac coniunctione ☿ vere in discum solis intret, et quousque se in solem immergere debeat. Ex locis computatis autem patet, latitudinis mutationem tempore 24 horarum esse $13'$, $59''$, vnde tempore 13^h. $22'$ mutatio latitudinis erit $7'$, $47''$. Tempore igitur coniunctionis mercurii et solis, latitudo mercurii erit $16'$, $31''$; vix igitur ac ne vix quidem mercurius solis discum attinget, quia latitudo mercurii minor non est, quam semidiameter solis apparens. Hoc autem intelligendum, quando spectator in centro terrae versaretur: quod si is autem in loco boreali constituatur, vbi hoc tem-

tempore ſolem prope horizontem cernit, propter parallaxin latitudo mercurii aliquantulum minor ipſi apparebit, atque differentia exſurget prope ad 8″. Quamobrem Obdorae, vbi haec coniunctio, ſole horizontem tenente, contingit, latitudo mercurii apparebit 16′, 23″. vnde ſi diameter ſolis apparens maior fuerit 32′, 46″, mercurius per ſolis diſcum tranſire conſpicietur. Tabulae autem Aſtronomicae apparentem diametrum ſolis hoc tempore maiorem non oſtendunt quam 32′, ex quo concludendum eſt mercurium in hac coniunctione extra limbum ſolis verſari debere. Scilicet momento coniunctionis, quo mercurius et centrum ſolis eandem tenent longitudinem; poſt coniunctionem autem, quia latitudo mercurii decreſcit ſingulis horis 35″; vna hora poſt coniunctionem latitudo mercurii erit 15′, 48″; atque tum mercurius ſecundum longitudinem a centro ſolis diſtabit 3′, 41″, in qua diſtantia ſolis latitudo adhuc maior quam 15′, 34″. Quod ſi autem inueſtigemus, quam prope poſt coniunctionem mercurius ad centrum ſolis accedat, inueniemus minimam diſtantiam eſſe 16′, 11″, idque Obdorae, vbi ſol prope horizontem hoc tempore ſpectatur, atque per parallaxin latitudo mercurii apparens diminuitur, quae diſtantia cum adhuc maior ſit, quam ſemidiameter ſolis apparens, ſequitur omnino ſecundum iſtas tabulas correctas, quibus ſum vſus, mercurium per diſcum ſolis non eſſe tranſiturum.

DETERMINATIO EXACTIOR GRADVVM PARALLELORVM AEQVATORIS et MERIDIANI

in figura Telluris hypothetice ſphaerica, *aut* (*prouti per recentiſſimam dimenſionem ſtabilitur*) ſphaeroide.

AVCTORE
C. N. de WINSHEIM.

Geographorum molimina, circa figuram Telluris determinandam, vsque ad *Riccioli* tempora, qui ipſe huic operi inuigilauit, ex ipſius *Geographia Reformata* abunde conſtant; Recentiorum vero conatus, e praeclaris eorum de demenſione telluris operibus editis, vberius perſpiciuntur.

Plerique eorum, dum dimenſionem terrae aggreſſi ſunt, eam figuram habere *ſphaericam*, tacite ſuppoſuerunt; hinc quoque ex arcu quodam meridiani cuiusdam, aut circuli maximi menſurato, magnitudinem totius globi terraquei, eiusque proin diametrum, peripheriam, ſuperficiem et ſoliditatem, determinare allaborarunt.

Et quamuis in diuerſas abierint ſententias Eruditorum nonnulli, *Hugenio* et *Newtono* terram *ſphaeroidem* eſſe, cuius diameter, axem data ratione ſuperet. *Caſſinis* vero patre et filio diametrum ab axe ſuperari affirmantibus; non defuere tamen magni nominis Viri qui Illuſtriſſimorum Academiae noſtrae Membrorum, Marchionis *Poleni* et *Wolfii* ſententiam amplectentes, terram nihilominus pro *ſphaerica* reputari, ſeque in dimenſione a *Piccardo* in Gallia, ſeculo proxime elapſo inſtituto, acquieſcere poſſe autumtumarunt. His perpenſis, me rem haud inutilem ac ingratam facturum ratus, tabulam ſingulorum parallelorum, per partes aequatoris expreſſorum, denuo ad calculum reuocaui, et a variis, quibus diuerſi Geographorum libri ſcatent, mendis purgaui. Adieci e regione quantitatem gradus paralleli, per hexapedas Gallicas, de nouo ad ductum praecedentis tabulae ſupputatas, vt et per pedes expreſſam Londinenſes; quoniam ratio harum menſurarum, ceteris notior erat, et maiori cum cura haud ita pridem in Academia noſtra determinata, vt facile cum Menſura hoc in Imperio vſitata comparari poſſit.

vid. Tab. A.

Eundem porro quem in priori columna Tabulae A. dedi, hic denuo ſiſto laterculum, cui, prouti titulus frontis innuit, non ſolum partes temporis partibus aequatoris reſpondentes iunxi, ſed etiam vlterius, gradum aequatoris cum gradibus parallelorum comparando, quis ille in horum vnoquoque valeat, per partes circuli aeque ac temporis, exprimere volui; hos ſiquidem laterculos, calculi Aſtronomici et Geographici moleſtiam certis in analogiis inſtituendis, quodammodo minuere poſſe confido.

vid. Tab. B.

Anno tandem proxime elapſo, ad manus noſtras peruenit, liber Celeberrimi Academiae noſtrae Sodalis *de Maupertuis*, qui Figuram Telluris, vna cum laborum Sociis eruditis, in *Lapponia* aeque ac *Gallia*, maioribus ad id vſus, magisque exacte elaboratis inſtrumentis Aſtronomicis, quam praecedentia quidem viderant ſecula, determinare aggreſſus erat. Hoc

Hoc libro lecto, cupido animum incessit, parallelorum gradus in *Figura Telluris Sphaeroide*, inibi stabilita supputandi, illisque gradus meridiani iungendi, qui quidem ex comparatione gradus sub circulo polari mensurati, cum gradu sub Parallelo 49° a *Piccardo* iam ante mensurato, nunc autem curatius determinato, deducendi erant.

Communicauit mecum, hunc in finem benignissime methodum suam, Celeberrimus *Eulerus*, mire facilem et compendiosam, quam ipsissimis Viri Celeberrimi Verbis, bona cum eius venia, praemitto; quoniam ea mediante, quae mox exhibebuntur, confectae sunt Tabulae C. et D.

METHODVS
VIRI CELEBERRIMI LEONH. EVLERI

Determinandi gradus Meridiani pariter ac Paralleli Telluris secundum Mensuram a CELEB. *de Maupertuis* cum sociis institutam.

Ex duobus gradibus Meridiani exacte mensuratis, quorum alter sub ipso circulo polari compertus est 57438 hexap. Paris. alter sub eleuatione Poli 49° 57183 hexap. Figura et magnitudo terrae ita determinatur, vt sit:
Semiaxis terrae = 3263626 hexap.
Semid. aequatoris = 3281570 hexap.
Hincque axis terrae ad diametrum aequatoris rationem teneat proxime vti

182 ad 183.

Ex

Ex his datis regulae poterunt tradi, tam ad ſingulos Meridianorum gradus, quam ad gradus Parallelorum definiendos.

Problema. I.

Sub data Eleuatione Poli definire quantitatem vnius gradus in Meridiano.

Solutio.

Bini caſus ſunt reſpiciendi, prior, ſi Eleuatio Poli *maior* ſit, quam 45°, poſterior, ſi *minor* ſit quam 45°. Vtroque caſu Eleuatio Poli bis ſumatur, ac *priori* caſu exceſſus ſupra 90°, poſteriori defectus infra 90°. notetur; atque ſiue exceſſus ſiue defectus capiatur Logarithmus ſinus, ad eumque perpetuo addatur iſte Logarithmus

2, 6718815

atque a ſumma ſubtrahatur Logarithmus ſinus totius

10 0000000

Logarithmi reſidui quaeratur numerus reſpondens.
Iſte numerus hoc modo inuentus, priori caſu, quo Eleuatio Poli maior eſt, quam 45°, addatur ad 57117, 6 hexap. poſteriori caſu autem, quo Eleuatio Poli minor erat, quam 45° ſubtrahatur a 57117, 6 et numerus reſultans dabit magnitudinem gradus Meridiani in hexapedis Pariſinis. Q. E. I.

Exemplum. 1.

Quaeratur gradus Meridiani ſub ipſo Aequatore

Eleuatio Poli ergo eſt - $0°$
duplum eius - - - $0°$
auferatur a - - - $90°$

remanet - - - - $90°$
Log. ſin. $90°$ = 10,0000000
addatur 2,6718815

Subtrahatur Log. ſin. tot. ⁄2,6718815
Numerus reſpondens 469,7
ſubtrahatur ab 57117,6

Gradus Meridiani = 56648 hexap. Pariſ. circa Aequatorem.

Exempl. 2.

Quaeratur Meridiani gradus ſub ipſo Polo
Eleuatio Poli eſt $90°$
eius duplum $180°$
ab eo ſubtrahatur $90°$

remanet — $90°$
Log. ſin. $90°$ = 10,0000000
addatur 2,6718815

ſubtrah. Log. ſin. tot. ⁄2,6718815
Num. reſpond. 469,7
addatur ad 57117,6

Gradus Meridiani = 57587 hexap. Pariſ. ſub ipſo Polo.

Exempl. 3.

Quaeratur Meridiani Gradus ſub Eleuatione Poli $49°$

Ele-

Eleuatio Poli eſt	49°
eius duplum	98°
ab eo ſubtrahantur	90°
remanent	8°
Logar. ſin. 8° =	9,1435553
addatur - - -	2,6718815
ſubtrah. Log. ſin. tot.	~~1~~1,8154368
Numer. reſpond.	65,3
addatur ad	57117,6
Gradus Merid. =	57183 hexap. Pariſ. in latit. 49°

Exempl. 4.

Quaeratur Gradus Meridiani ſub circulo Polari

Eleuatio Poli eſt	66° 30′
eius duplum	133°
auferantur	90°
remanet	43°
Logar. ſin. 43° =	9,8337833
addatur	2,6718815
	~~1~~2,5056648
Num. reſpond.	320,4
addatur	57117,6
Gradus Merid. =	57438, hexap. Pariſ. ſub circulo Polari.

Exemplum 5.

Quaeratur gradus Meridiani ad Latitudinem 60°

Eleuatio Poli est	60°
eius duplum	120°
auferantur	90°
remanet	30°
Log. sin. 30° =	9,6989700
addatur	2,6718815
	12,3708515
Numerus respond.	234,8
addatur ad	57117,6

Gradus Merid. = 57352, Hexap. Paris. sub Eleuatione Poli 60°

Problema II.

Ad datam Eleuationem Poli inuenire Gradum vnum in Parallelo.

Solutio.

Primo sumatur Logarithmus Cosinus Eleuationis Poli, ad eumque constanter addatur hic Logarithmus

4,7591447

a summa auferatur Logarithmus sinus totius, et Logarithmi residui quaeratur numerus respondens.

Secundo duplicetur Eleuatio Poli atque vel a duplo subtrahantur 90° vel ipsum duplum a 90° gradibus auferatur, prout Eleuatio Poli fuerit vel maior quam 45° vel minor.

nor. Vtroque dein casu capiatur Logarithmus sinus residui, ad eumque addatur Logarithmus Cosinus Eleuationis Poli, insuperque perpetuo addatur 2, 1947602 et a summa subtrahatur Logarithmus sinus totius bis sumtus nempe

2, 0000000

Logarithmi residui quaeratur numerus respondens, hicque priori casu, quo Eleuatio Poli maior est 45° addatur ad numerum supra inuentum, altero casu quo Eleuatio Poli minor est quam 45° subtrahatur a numero supra inuento, sicque prodibit magnitudo Gradus in Parallelo proposito.

Q. E. I.

Exempl. I.

Quaeratur magnitudo vnius Gradus in ipso Aequatore

Eleuatio Poli ergo est 0°

Logar. cos. 0°	=	10, 0000000
addatur		4, 7591447
		14, 7591447
Num. respond.	=	57430, 8
duplum Eleuationis Poli		0°
subtr. a		90°
remanet		90°
Log. sin. 90°	=	10, 0000000
Log. cos. 0°	=	10, 0000000
addatur		2, 1947602
subtrah. 2 log. sin. tot.		22, 1947602

Num. resp.	156, 6
ſubtrahatur ab	57430, 8
Gradus Aequat. =	57274 Hex. Pariſ.

Exempl. 2.

Quaeritur magnitudo vnius gradus in parallelo latitudinis 60°

Eleuatio poli eſt 60°

Log. coſ. 60° =	9, 6989700
addatur	4, 7591447
	14, 4581147
Num. reſpond.	28715, 4
Duplum Eleu. Poli eſt	120°
auferantur	90
remanet	30°
Log. ſin. 30° =	9, 6989700
Log coſ. 60° =	9, 6989700
addatur	2, 1947602
ſubtr. 2. Log. ſin. tot.	21, 5927002
Num. reſpondens	39, 1
addatur ad	28715, 4
Gradus Parall. =	$28754\frac{1}{2}$ Hex. Pariſ. ſub Eleuatione Poli 60°

Exempl. 3.

Quaeratur ſub Eleuatione Poli 40° magnitudo vnius gradus in parallelo

Eleuatio

Eleuatio Poli est	40°	
Log. cos. 40° =	9, 8842540	
addatur	4, 7591447	
	14, 6433987	
Numer. respond.	43994, 6	
Eleuatio Poli bis sumta		80°
auferatur ab		90°
remanet		10°
Log. sin. 10° =	9, 2396702	
Log. cos. 40° =	9, 8842540	
addatur	2, 1947602	
	21, 3186844	
Numer. respond.	20, 8	
subtrahatur ab	43994, 6	

Gradus Paralleli = 43974 Hex. Paris. sub Eleuatione Poli 40°

Tab.

Tab. A.

Singuli gradus Parallelorum Aequatoris, per minutias Aequatoris expressi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas et Pedes Anglicanos, supposita figura Telluris Sphaerica, per mensuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus latitudinis	Minutiae Aequat.			Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
0	60′	0″	0‴	57060	364734
1	59	59	27	57051	364678
2	59	57	48	57025	364511
3	59	55	4	56982	364234
4	59	51	14	56921	363846
5	59	46	18	56843	363346
6	59	40	17	56747	362737
7	59	33	10	56635	362015
8	59	24	58	56505	361185
9	59	15	41	56357	360244
10	59	5	18	56193	359192
11	58	53	51	56012	358032
12	58	41	20	55813	356764
13	58	27	44	55598	355386
14	58	13	4	55365	353900
15	57	57	20	55116	352306
16	57	40	33	54850	350606
17	57	22	42	54567	348797
18	57	3	48	54267	346882
19	56	43	52	53951	344863
20	56	22	54	53619	342739
21	56	0	53	53270	340508
22	55	37	52	52905	338176
23	55	13	49	52524	335739
24	54	48	46	52127	333201
25	54	22	42	51714	330560
26	53	55	39	51285	327820
27	53	27	37	50841	324980
28	52	58	37	50381	322042
29	52	28	38	49906	319004
30	51	57	41	49415	315868

Singu-

Singuli gradus Parallelorum Aequatoris per minutias Aequatoris expressi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas et Pedes Anglicanos, supposita Figura Telluris Sphaerica, per Mensuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus Latitudinis	Minutiae Aequat.	Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
31	51′ 25″ 48‴	48910	312638
32	50 52 58	48389	309311
33	50 19 13	47854	305892
34	49 44 32	47305	302378
35	49 8 58	46741	298774
36	48 32 28	46163	295077
37	47 55 5	45571	291289
38	47 16 50	44964	287414
39	46 37 44	44344	283452
40	45 57 46	43711	279403
41	45 16 57	43064	275269
42	44 35 19	42404	271050
43	43 52 52	41731	266749
44	43 9 37	41045	262367
45	42 25 35	40347	257906
46	41 40 46	39637	253365
47	40 55 12	38915	248749
48	40 8 52	38180	244054
49	39 21 49	37435	239287
50	38 34 2	36677	234446
51	37 45 33	35909	229534
52	36 56 23	35130	224553
53	36 6 32	34340	219502
54	35 16 2	33539	214386
55	34 24 53	32728	209204
56	33 33 6	31908	2039[illegible]7
57	32 40 42	31077	19864[illegible]
58	31 47 43	30237	193280
59	30 54 8	29388	187852
60	30 0 0	28530	182367

Singu-

Singuli Gradus Parallelorum Aequatoris per Minutias Aequatoris expressi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas et Pedes Anglicanos, supposita Figura Telluris Sphaerica, per Mensuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus Latitudinis	Minutiae Aequat.			Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
61	29′	5″	19‴	27663	176827
62	28	10	6	26788	171232
63	27	14	22	25905	165586
64	26	18	8	25013	159889
65	25	21	26	24115	154144
66	24	24	15	23208	148350
67	23	26	38	22295	142513
68	22	28	35	21375	136632
69	21	30	7	20448	130708
70	20	31	16	19516	124746
71	19	32	3	18577	118746
72	18	32	28	17633	112710
73	17	32	32	16683	106637
74	16	32	18	15728	100535
75	15	31	45	14768	94400
76	14	30	55	13804	88237
77	13	29	49	12836	82047
78	12	28	29	11863	75833
79	11	26	55	10888	69595
80	10	25	8	9908	63335
81	9	23	10	8926	57057
82	8	21	1	7941	50760
83	7	18	44	6954	44450
84	6	16	18	5964	38125
85	5	13	46	4973	31789
86	4	11	7	3980	25442
87	3	8	25	2986	19089
88	2	5	38	1991	12729
89	1	2	50	996	6366
90	0	0	0	000	0000

Tab-

Tab. B.

Tabula Quadripartita

Partim fingulos Gradus Parallelorum per Minutias Aequatoris pariter ac Temporis exhibens, Partim Gradum Aequatoris per Gradus Parallelorum et Minutias Temporis refpondentes exprimens.

Decl. f. Latitudo Parall.	Minutiae Aequatoris aequiualentes vni Gradui Paralleli			Minutiae Temporis Minutiis Aequatoris refpondentes.				Decl. f. Latitudo Parall.	Grad. Aequatoris per Gr. Min. etc. fingulorum Parall. exprelfus				Minutiae Temporis Partibus Circuli refpondentes.			
	′	″	‴	M.	S.	T.	Q.		°	′	″	‴	M.	S.	T.	Q.
1	59	59	27	3	59	57	48	1	1	0	0	33	4	0	2	12
2	59	57	48	3	59	51	12	2	1	0	2	12	4	0	8	48
3	59	55	4	3	59	40	16	3	1	0	4	56	4	0	19	44
4	59	51	14	3	59	24	56	4	1	0	8	47	4	0	35	8
5	59	46	18	3	59	5	12	5	1	0	13	45	4	0	55	0
6	59	40	17	3	58	41	8	6	1	0	19	50	4	1	19	20
7	59	33	10	3	58	12	40	7	1	0	27	2	4	1	48	8
8	59	24	58	3	57	39	52	8	1	0	35	23	4	2	21	32
9	59	15	41	3	57	2	44	9	1	0	44	52	4	2	59	28
10	59	5	18	3	56	21	12	10	1	0	55	33	4	3	42	12
11	58	53	51	3	55	35	24	11	1	1	7	23	4	4	29	32
12	58	41	20	3	54	45	20	12	1	1	20	25	4	5	21	40
13	58	27	44	3	53	50	56	13	1	1	34	42	4	6	18	48
14	58	13	4	3	52	52	16	14	1	1	50	12	4	7	20	48
15	57	57	20	3	51	49	20	15	1	2	7	0	4	8	28	0
16	57	40	33	3	50	42	12	16	1	2	25	4	4	9	40	16
17	57	22	42	3	49	30	48	17	1	2	44	29	4	10	57	56
18	57	3	48	3	48	15	12	18	1	3	5	16	4	12	21	4
19	56	43	52	3	46	55	28	19	1	3	27	26	4	13	49	44
20	56	22	54	3	45	31	36	20	1	3	51	2	4	15	24	8
21	56	0	53	3	44	3	32	21	1	4	16	8	4	17	4	32
22	55	37	52	3	42	31	28	22	1	4	42	43	4	18	50	52
23	55	13	49	3	40	55	16	23	1	5	10	54	4	20	43	36
24	54	48	46	3	39	15	4	24	1	5	40	41	4	22	42	44
25	54	22	42	3	37	30	48	25	1	6	12	10	4	24	48	40
26	53	55	39	3	35	42	36	26	1	6	45	23	4	27	1	32
27	53	27	37	3	33	50	28	27	1	7	20	23	4	29	21	32
28	52	58	37	3	31	54	28	28	1	7	57	15	4	31	49	0
29	52	28	38	3	29	54	32	29	1	8	36	4	4	34	24	16
30	51	57	41	3	27	50	44	30	1	9	16	56	4	37	7	44

Decl. f. Latitudo Parall.	Minutiae Aequatoris aequiualentes vni Gradui Paralleli			Minutiae Temporis Minutiis Aequatoris respondentes.				Decl. f. Latitudo Parall.	Gradus Aequatoris per Gr. Min. etc. singulorum Parall. expressus.				Minutiae Temporis Partibus Circuli respondentes.			
° ′	′	″	‴	M.	S.	T.	Q.		°	′	″	‴	M.	S.	T.	Q.
31	51	25	48	3	25	43	12	31	1	9	59	53	4	39	59	32
32	50	52	58	3	23	31	52	32	1	10	45	3	4	43	0	12
33	50	19	13	3	21	16	52	33	1	11	32	30	4	46	10	0
34	49	44	32	3	18	58	8	34	1	12	22	23	4	49	29	32
35	49	8	58	3	16	35	52	35	1	13	14	46	4	52	59	4
36	48	32	28	3	14	9	52	36	1	14	9	50	4	56	39	20
37	47	55	5	3	11	40	20	37	1	15	7	42	5	0	30	48
38	47	16	50	3	9	7	20	38	1	16	8	28	5	4	33	52
39	46	37	44	3	6	30	56	39	1	17	12	19	5	8	49	16
40	45	57	46	3	3	51	4	40	1	18	19	27	5	13	17	48
41	45	16	57	3	1	7	48	41	1	19	30	3	5	18	0	12
42	44	35	19	2	58	21	16	42	1	20	44	17	5	22	57	8
43	43	52	52	2	55	31	28	43	1	22	2	23	5	28	9	32
44	43	9	37	2	52	38	28	44	1	23	24	36	5	33	38	24
45	42	25	35	2	49	42	20	45	1	24	51	10	5	39	24	40
46	41	40	46	2	46	43	4	46	1	26	22	25	5	45	29	40
47	40	55	12	2	43	40	48	47	1	27	58	36	5	51	54	24
48	40	8	52	2	40	35	28	48	1	29	40	7	5	58	40	28
49	39	21	49	2	37	27	16	49	1	31	27	18	6	5	49	12
50	38	34	2	2	34	16	8	50	1	33	20	37	6	13	22	28
51	37	45	33	2	31	2	12	51	1	35	20	28	6	21	21	52
52	36	56	23	2	27	45	32	52	1	37	27	22	6	29	49	28
53	36	6	32	2	24	26	8	53	1	39	41	54	6	38	47	36
54	35	16	2	2	21	4	8	54	1	42	4	40	6	48	18	20
55	34	24	53	2	17	39	32	55	1	44	36	23	6	58	25	32
56	33	33	6	2	14	12	24	56	1	47	17	50	7	9	11	20
57	32	40	42	2	10	42	48	57	1	50	9	53	7	20	39	32
58	31	47	43	2	7	10	52	58	1	53	13	28	7	32	53	52
59	30	54	8	2	3	36	32	59	1	56	29	47	7	45	59	8
60	30	0	0	2	0	0	0	60	2	0	0	0	8	0	0	0
61	29	5	19	1	56	21	16	61	2	3	45	35	8	15	2	20
62	28	10	6	1	52	40	24	62	2	7	48	11	8	31	12	44
63	27	14	22	1	48	57	28	63	2	12	9	40	8	48	38	40
64	26	18	8	1	45	12	32	64	2	16	52	14	9	7	28	56
65	25	21	26	1	41	25	44	65	2	21	58	17	9	27	53	8

Decl. f. Latitudo Parall.	Minutiae Aequatoris aequivalentes uni Gradui Paralleli			Minutiae Temporis Minutiis Aequatoris respondentes				Decl. f. Latitudo Parall.	Gradus Aequatoris per Gr. Min. etc. singulorum Parall. expressus				Minutiae Temporis Partibus Circuli respondentes				
	′	″	‴	M.	S.	T.	Q.		°	′	″	‴	H	′	″	‴	⁗
66	24	24	15	1	37	37	0	66	2	27	30	57		9	50	3	48
67	23	26	38	1	33	46	32	67	2	33	33	29		10	14	13	56
68	22	28	35	1	29	54	20	68	2	40	10	5		10	40	40	20
69	21	30	7	1	26	0	28	69	2	47	25	36		11	9	42	24
70	20	31	16	1	22	5	4	70	2	55	25	45		11	41	43	0
71	19	32	8	1	18	8	12	71	3	4	17	33		12	17	10	12
72	18	32	28	1	14	9	52	72	3	14	9	47		12	56	39	8
73	17	32	32	1	10	10	8	73	3	25	13	9		13	40	52	36
74	16	32	18	1	6	9	12	74	3	37	40	34		14	30	42	16
75	15	31	45	1	2	7	0	75	3	51	49	19		15	27	17	16
76	14	30	55	0	58	3	40	76	4	8	0	52		16	32	3	28
77	13	29	49	0	53	59	16	77	4	26	43	37		17	46	54	28
78	12	28	29	0	49	53	56	78	4	48	35	1		19	14	20	4
79	11	26	55	0	45	47	40	79	5	14	27	21		20	57	49	24
80	10	25	8	0	41	40	32	80	5	45	31	35		23	2	6	8
81	9	23	10	0	37	32	40	81	6	23	32	44		25	34	10	56
82	8	21	1	0	33	24	4	82	7	11	7	24		28	44	29	36
83	7	18	44	0	29	14	56	83	8	12	19	35		32	49	18	20
84	6	16	18	0	25	5	12	84	9	34	0	36		38	16	2	24
85	5	13	46	0	20	55	4	85	11	28	24	35		45	53	38	20
86	4	11	7	0	16	44	28	86	14	20	9	29		57	20	37	56
87	3	8	25	0	12	33	40	87	19	6	23	43	1	16	25	34	52
88	2	5	38	0	8	22	32	88	28	39	17	2	1	54	37	8	8
89	1	2	50	0	4	11	20	89	57	17	39	57	3	49	10	39	48
90	0	0	0	0	0	0	0	90	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. C.

Gradus singuli Parallelorum Aequatoris per mensuram Telluris sub circulo polari et 49° latitudinis Celeber. de Maupertuis determinati, methodo a Celeber. Eulero tradita supputati et in Hexapedis Gallicis exhibiti.

G. lat.	Hexa. Dec.	Diff. 1.	Diff. 2.	G. lat.	Hexa. Dec.	Diff. 1.	Diff. 2.
0	57274. 2	7. 5	19. 8	45	40609. 7	711. 2	12. 2
1	57266. 7	27. 0	16. 1	46	39898. 5	723. 4	12. 1
2	57239. 7	43. 1	17. 5	47	39175. 1	735. 5	11. 8
3	57196. 6	60. 6	16. 8	48	38439. 6	747. 3	11. 8
4	57136. 0	77. 4	17. 3	49	37692. 3	759. 1	11. 3
5	57058. 6	94. 7	16. 6	50	36933. 2	770. 4	11. 2
6	56963. 9	111. 3	18. 8	51	36162. 8	781. 6	11. 0
7	56852. 6	130. 1	16. 0	52	35381. 2	792. 6	10. 6
8	56722. 7	146. 1	17. 1	53	34588. 6	803. 2	10. 5
9	56576. 6	163. 2	17. 1	54	33785. 4	813. 7	10. 3
10	56413. 4	180. 3	16. 7	55	32971. 7	824. 0	10. 1
11	56233. 1	197. 0	17. 4	56	32147. 7	834. 1	9. 5
12	56036. 1	214. 4	16. 7	57	31313. 6	843. 6	9. 6
13	55821. 7	231. 1	17. 6	58	30470. 0	853. 2	9. 1
14	55590. 6	248. 7	15. 8	59	29616. 8	862. 3	9. 0
15	55341. 9	264. 5	14. 7	60	28754. 5	871. 3	8. 7
16	55077. 4	279. 2	19. 6	61	27883. 2	880. 0	8. 5
17	54798. 2	298. 8	15. 4	62	27003. 2	888. 5	8. 0
18	54499. 4	314. 2	15. 4	63	26114. 7	896. 5	7. 9
19	54185. 2	329. 6	18. 4	64	25218. 2	904. 4	7. 6
20	53855. 6	348. 0	15. 1	65	24313. 8	912. 0	7. 3
21	53507. 6	363. 1	16. 2	66	23401. 8	919. 3	7. 1
22	53144. 5	379. 3	16. 0	67	22482. 5	926. 4	6. 7
23	52765. 2	395. 3	15. 8	68	21556. 1	933. 1	6. 4
24	52369. 9	411. 1	15. 9	69	20623. 0	939. 5	6. 2
25	51958. 8	427. 0	14. 6	70	19683. 5	945. 7	5. 9
26	51531. 8	441. 6	15. 5	71	18737. 8	951. 6	5. 6
27	51090. 2	459. 1	14. 4	72	17786. 2	957. 2	5. 1
28	50631. 1	473. 5	15. 3	73	16829. 0	962. 3	5. 1
29	50157. 6	488. 8	15. 3	74	15866. 7	967. 4	4. 7
30	49668. 8	504. 1	14. 5	75	14899. 3	972. 1	4. 4
31	49164. 7	518. 6	15. 4	76	13927. 2	976. 5	4. 0
32	48646. 1	534. 0	14. 4	77	12950. 7	980. 5	3. 7
33	48112. 1	548. 4	15. 6	78	11970. 2	984. 2	3. 6
34	47563. 7	563. 0	14. 3	79	10986. 0	987. 8	3. 0
35	47000. 7	577. 3	14. 2	80	9998. 2	990. 8	2. 9
36	46423. 4	591. 5	14. 1	81	9007. 4	993. 7	2. 5
37	45831. 9	605. 6	13. 9	82	8013. 7	996. 2	2. 2
38	45226. 3	619. 5	13. 6	83	7017. 5	998. 4	1. 9
39	44606. 8	633. 1	13. 5	84	6019. 1	1000. 3	1. 5
40	43973. 7	646. 6	13. 2	85	5018. 8	1001. 8	1. 4
41	43327. 1	659. 8	13. 2	86	4017. 0	1003. 2	0. 9
42	42667. 3	673. 0	13. 0	87	3013. 8	1004. 1	0. 6
43	41994. 3	686. 0	12. 6	88	2009. 7	1004. 7	0. 3
44	41308. 3	698. 6		89	1005. 0	1005. 0	
				90	0		

Tab. D.

Singuli Gradus Meridiani Telluris e determinatione Celeb. de Maupertuis etc. Methodo a Celeb. Eulero suppeditata, calculati et per Perticas Gallicas expressi.

G.lat.	Hexap.Dec.	Diff. 1	Diff. 2	G.lat.	Hexap.Dec.	Differ. 1	Diff. 2
0	56647.9	0.3	5	46	57134.0	16.3	1
1	56648.2	0.8	7	47	57150.3	16.4	1
2	56649.0	1.5	5	48	57166.7	16.3	1
3	56650.5	2.0	5	49	57183.0	16.2	1
4	56652.5	2.5	6	50	57199.2	16.1	2
5	56655.0	3.1	6	51	57215.3	15.9	1
6	56658.1	3.7	6	52	57231.2	15.8	1
7	56661.8	4.3	5	53	57247.0	15.7	2
8	56666.1	4.8	5	54	57262.7	15.5	2
9	56670.9	5.3	6	55	57278.2	15.3	2
10	56676.2	5.9	5	56	57293.5	15.1	2
11	56682.1	6.4	5	57	57308.6	14.9	3
12	56688.5	6.9	6	58	57323.5	14.6	3
13	56695.4	7.5	4	59	57338.1	14.3	2
14	56702.9	7.9	6	60	57352.4	14.1	4
15	56710.8	8.5	4	61	57366.5	13.7	2
16	56719.3	8.9	5	62	57380.2	13.5	4
17	56728.2	9.4	5	63	57393.7	13.1	4
18	56737.6	9.9	4	64	57406.8	12.7	3
19	56747.5	10.3	4	65	57419.5	12.4	4
20	56757.8	10.7	5	66	57431.9	12.0	4
21	56768.5	11.2	4	67	57443.9	11.6	4
22	56779.7	11.6	4	68	57455.5	11.2	5
23	56791.3	12.0	4	69	57466.7	10.7	4
24	56803.3	12.4	3	70	57477.4	10.3	4
25	56815.7	12.7	4	71	57487.7	9.9	5
26	56828.4	13.1	4	72	57497.6	9.4	5
27	56841.5	13.5	2	73	57507.0	8.9	4
28	56855.0	13.7	4	74	57515.9	8.5	6
29	56868.7	14.1	2	75	57524.4	7.9	4
30	56882.8	14.3	3	76	57532.3	7.5	6
31	56897.1	14.6	3	77	57539.8	6.9	5
32	56991.7	14.9	4	78	57546.7	6.4	5
33	56926.6	15.1	2	79	57553.1	5.9	6
34	56941.7	15.3	2	80	57559.0	5.3	5
35	56957.0	15.5	2	81	57564.3	4.8	5
36	56972.5	15.7	1	82	57569.1	4.3	6
37	56988.2	15.8	1	83	57573.4	3.7	6
38	57004.0	15.9	2	84	57577.1	3.1	6
39	57019.9	16.1	1	85	57580.2	2.5	5
40	57036.0	16.2	1	86	57582.7	2.0	5
41	57052.2	16.3	1	87	57584.7	1.5	7
42	57068.5	16.4	1	88	57586.2	0.8	5
43	57084.9	16.3	1	89	57587.0	0.3	
44	57101.2	16.4	0	90	57587.3		
45	57117.6	16.4					

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

§. 2. Antequam autem rem aggrediar, necesse erit praemittere aliquas definitiones, quas optici, et veteres et recentiores, ad describendum, quid sit imago in speculo aliquo apparens, concinnarunt. *Alhazen* igitur opticae lib. V. cap. IX. dicit: *imago est forma visibilis à polita superficie reflexa*; vel *forma comprehensa in corpore polito nominatur imago*. *Barrouius* in lect. opticis pag. 4. magis adaequate loquitur, cum dicit: *imagines autem nil plane sunt aliud, quam lux ab obiectis ita reflexa vel refracta, vt rursus in vnum locum talemque recolligatur situm, qualem tunc obtinuit, quum ab originali proflueret obiecto, directoque versus oculum itinere procederet, quo fit, vt similiter obiecta, sed tanquam alibi collocata, repraesentent.* Bene haec certe se habent, si sola vox: *similiter*, omittatur, nisi eam generalissime intellectam velis. In nullo enim speculorum curuilineorum genere imago similis plane dici potest suo obiecto. Plura, quam quae huic definitioni necessaria sunt, miscet *Keplerus*, dum paralipom. in Vitellionem pag. 60. inquit: *imago est visio rei alicuius, cum errore facultatum, ad visum concurrentium, coniuncta.* Sapit enim magis metaphysicam, quam physicam aut geometriam, haec explicatio.

§. 3. Praemissis his definitionibus imaginis in speculo quocunque, ad institutum iam propius accedam; ad locum nempe eum designandum, quem obiectum quodcunque, speculo cuiuscunque generis oppositum, in speculo occupare videtur. Absoluit enim totius catoptricae tractationem praecipuam haec quaestio; sed agit tantum de loco puncti vnius in speculum radiantis; quoniam, si singu-

lorum

lorum talium punctorum imagines et loca determinata fuerint, totius deinde etiam obiecti extenſi locus iuſtus habetur. Ab antiquiſſimis igitur catoptricae ſcriptoribus haec lex ſtabilità fuit: *puncti in ſpeculum quodcunque radiantis imaginem ibi apparere, vbi cathetus incidentiae cum radio reflexo concurrit*; vt, ſi ex. gr. punctum radians ſit in R, à quo in ſpeculum ſphaericum conuexum cadat radius R I, cuius reflexus intret oculum intuentem in O; duxerunt ex R cathetum incidentiae R D, vergentem ad C, ſi C fuerit centrum arcus ſpecularis A B, deinde reflexum O I continuarunt in directum, donec concurreret cum catheto incidentiae in *r*, atque tum in loco *r* imaginem puncti R haeſuram eſſe aſſeruerunt. *Euclides* quidem in catoptricis non iisdem hiſce verbis ſententiam hanc, iam eo tempore receptam, plene effert, ſed id ſolum demonſtrat: in planis, conuexis et cauis ſpeculis aſpectabile quodlibet cerni in linea recta, ducta ab aſpectabili perpendiculariter ad planitiem, aut ad centrum ſphaerae, cuius portio eſt ſpeculum. Cum vero hoc per ſe intelligatur, punctum quodcunque apparere debere in radio reflexo, qui imaginem puncti ſui oculo quaſi affert; manifeſtiſſimum eſt, ipſum quoque hanc ſententiam exprimere voluiſſe; quamuis nusquam diſerte aſſerat, punctum radians apparere in radio reflexo; ex eius Prop. VII. et aliis tamen hoc non obſcure intelligi poteſt. *Ptolemaeus* deinde et *Albazen* opticae lib. V. cap. 2 Nr. 8. diſerte ponunt: *imago in quocunque ſpeculo videtur in concurſu perpendicularis incidentiae et lineae reflexionis.* Hos ſecuti ſunt *Vitello*, *Fabry*, *Taquetus* et plures recentiorum alii, vt mirum ſit, errorem Tab. III. Fig. 1.

hunc ad noſtram aetatem vſque per doctiſſimos viros potuiſſe propagari.

§. 4. At videamus iam probationes, quibus hoc aſſertum ſtabilire conati ſunt viri modo allegati; nam in hac re ſibi non defuerunt argumentis vtcunque ſpecioſis. Primus itaque *Euclides* experimenti ſeu phaenomeni loco praemittit ſuae demonſtrationi: *in ſpeculis quibuscunque*, *occupato*, hoc eſt, obtecto, *eo ſpeculi loco*, *in quem cadit perpendicularis*, *ducta à re aſpectabili ad ſpeculum*, *rem aſpectabilem non cerni.* Hinc Propp. XVI. XVII. XVIII. argumentatus eſt: quoniam occupato loco D punctum R cerni non poteſt, videbitur punctum R in aliquo puncto lineae rectae R*d*, productae in directum; videtur autem ſimul in radio O I, producto in directum; ergo videbitur in puncto aliquo, quod vtrique rectae RC et OI commune eſt, hoc eſt, in *r*. Quae vero in hac demonſtratione reiicienda ſint, dicam poſtea.

§. 5. Secundus *Albazen* duplex argumentum affert ad ſententiam eandem probandam. Prius nititur iterum Fig. 2. experimento, nempe ſequenti. In ſpeculo ex. gr. ſphaerico conuexo E F, cuius centrum C, erigatur perpendiculariter bacillus B D, cuius tota imago intra ſpeculum apparet. Ponatur in hoc bacillo alicubi ſignum A, dicit illud appariturum in *a* ſic, vt diſtantiae B A et B *a* futurae ſint aequales, oculorum nempe iudicio, lib. V. cap. 2. Nr. 3. quod quidem experimentum, etiamſi verum eſſet, ſententiam tamen hanc potius euerteret, quam adſtrueret: ita legitimi nexus experimentorum cum concluſionibus illa aetas fuit inſcia; et in hoc ſolo ſapere vide-

videtur Arabs, quod argumentum *Euclidis*, modo allatum, cum ceteris ex eo decerptis, non afferat. Alterum eius argumentum metaphyſicum eſſe videri poteſt, dum cenſet, nullum digniorem imagini locum tribui poſſe, quam ab ipſo aſſignatum; atque ſic dignitatem ſitus perpendiculo metitur. *Albazenum* preſſo pede ſequitur *Vitello*, ita, vt alter priori etiam hic, vti in ceteris quoque, ſit ſimillimus.

§. 6. Aſſerti falſi adhuc emendatiorem dedit probationem *Tacquetus*, catoptricae lib. 1. prop. 22. male tamen idcirco laudatus a *Clarkio* in notis ad *Rohalti* phyſicam parte 1. cap. 34. §. 18. quaſi recte propoſitum demonſtraſſet ſuum. Is adhibito eodem bacillo perpendiculari ad ſpeculum B D, ſed omiſſo ſigno A, experientia nos edoceri ponit, imaginem huius bacilli B*d* eſſe in directum cum bacillo ipſo. Hoc experimentum, adiungit porro, vel centies ab ipſo fuiſſe exploratum, atque eos, qui negant hoc phaenomenon, experimentum feciſſe aut oſcitanter, aut imperite, dum nempe ſtylum ſpeculo non exacte ad angulos rectos impoſuerint; cauſam quoque phaenomeni in eo ſitam eſſe ait, quod, cum perpendicularis ſtylus nuſpiam inclinetur, nulla etiam ratio adſit, cur imago in vllam partem magis, quam in aliam inclinet; ac proinde neceſſe eſſe, vt ea vnam cum ſuo prototypo lineam rectam efficiat. Hoc eodem vtroque argumento nituntur quoque adhuc omnes illi recentiorum, qui eandem ſententiam hucuſque propagarunt; ſed et ob ipſum hunc errorem admiſſum coguntur cum *Tacqueto* fateri, locum hanc ſententiam non habere in ſpeculis cauis, ſed veritatem aſſerti veterum deficere a phaenomenis in

caſu

casu non vno. Quod quidem, vt *Keplerus* loquitur, *macula foeda est in pulcherrima scientia.*

§. 7. Primus autem, quantum inuenire potui, veterum huic sententiae obstitit *Keplerus* in Paralipom. ad *Vitellionem* pag. 56 seqq. eandemque emendaturus pag. 75. pro loco imaginis assignando in speculo parabolico convexo sequentia profert: sit speculum parabolicum $\alpha\beta\gamma$, oculus in ζ, obiectum in η, sic, vt incidens $\eta\beta$, et reflexus $\beta\zeta$ faciant angulos aequales vtrinque cum tangente $\varepsilon\beta\delta$. Iam veteres optici, pro loco imaginis determinando, iubent ex η in speculum ducere perpendicularem $\eta\theta$, atque reflexum $\zeta\beta$ tamdiu continuare, donec priorem perpendicularem secet in ω, statuuntque punctum hoc sectionis locum esse imaginis. *At*, pergit ille, *verior ratio iubet inuenire circulum, qui contineat rationem curuitatis, quam habet sectio in* β, *puncto repercussus: (habent autem aliam atque aliam huiusmodi mixtae lineae) Sit quantitas* $\varkappa\beta$, *et ducta ex* β *ipsi* $\varepsilon\delta$ *perpendiculari, quae sit* $\beta\varkappa$, *centrum circuli ponetur in linea* $\beta\varkappa$, *coniungeturque* $\beta\varkappa$, *eritque locus imaginis, vbi* $\zeta\beta$ *continuata secat* $\eta\varkappa$, *scilicet in* μ. Vocat deinde disertis verbis rectam $\varkappa\beta$ rationem curuitatis.

Fig. 3.

§. 8. Quamuis itaque haud diffiteri possim, nescire me, qua ex causa veterum regulae hanc nouam substituerit *Keplerus*, cum nullam ipse constructionis suae afferat rationem: videtur tamen id solum efficere voluisse, vt hoc modo speculum parabolicum pro situ puncti repercussus β reducatur quamproxime ad speculum circulare, vt deinde simili modo illud tractari possit, quo haec tractata vsque ad illam aetatem fuerunt. Adeoque sagacissimus

cissimus auctor methodum veterum ad alia specula, quam circularia, extendi non posse, potius docet, quam ipsam methodum antiquam euertit. Nam facile patet, eandem hanc methodum keplerianam coincidere plane cum antiqua, si transferatur ad specula circularia. Sed hoc praeterire non possum, primam in allegato loco omnium, quantum quidem scio, circuli osculantis notionem occurrere. Quamvis enim quantitatem ipsius $\beta\kappa$ determinare non potuerit *Keplerus*, ideam tamen circuli osculantis et radii osculi animo ipsius insedisse euincunt omnia ipsi adhibita verba, qualia sunt: *inuenire circulum, qui contineat rationem curvitatis, quam habet sectio in* β; *habent aliam atque aliam rationem curuitatis huiusmodi lineae mixtae*; *sit* $\kappa\beta$ *perpendicularis ad tangentem* $\varepsilon\delta$; *recta* $\beta\kappa$ *est ratio curvitatis*. Vt plane iucundum sit intelligere, quae negotii huius, a recentioribus iam diligentissime pertractati, vmbra perspicacissimo huic viro iam tum obuersata fuerit.

§. 9. Meliori autem longe successu veterum hanc opinionem, quam errorem in optica capitalem vocat, plane euertit *Barrouius*, substituitque illi primus aliam, suam, et quae veritati conformis est. *Si enim*, arguit ille in lectionibus opticis, lect. VI. §. 19. *imago a puncto reflexionis* B *tanto distat interuallo, quanto punctum radians ab eodem semouetur: sol, ex huiusmodi reflexione conspicuus, ad tantam, quantam directe spectatus, distantiam deberet apparere; quod immane quantum experientiae refragatur.* Aliud deinde subiungit experimentum, cum speculo cauo instituendum, l. c. lect. X. §. 27. *Si tanquam circa punctum* a *accensa candela speculo cauo* EBF *exponatur*,

 oculo

oculo velut ad d *sito, longe maiori distans interuallo conspicietur, quam ipso a* B; *quinimo, tantillo versus centrum illam adducendo, non aequali distantia, sed admodum maiori videbitur elongari, tanta circiter ad sensum probabilemque coniecturam, quantam proportio requirit a nobis praestita.* Ita vero deinde vir egregius erroneae legitimam substituit opinionem, vt mirum sit, hanc neglectam hucusque in scriptis opticorum iacere.

§. 10. Accedam nunc ad id, vt ostendam, vbi haereant vitia in probationibus veterum occurrentia. Igitur *Euclidis* demonstratio nititur experimento plane falsissimo, cuius falsitas manibus fere palpari potest, ita, vt vix speculum, vel planum, vel aliud, vnquam ad manus huic fuisse credi possit. Tegatur enim ex eius sententia punctum D in quocunque speculo: obiecti imago nihilominus in oculos, plane vt ante, incurret. *Albazeni* et *Vitellonis* experimenta, ad probationem suam adducta, vim quoque naturae inferre, abunde iam probaui ex *Barrouio*, §. 9; et quae de dignitate loci ab ipsis assignati in medium proferunt, prudenti harum rerum aestimatori quam minime persuadebunt.

§. 11. Paullo autem difficilius est inuenire ea, quae in *Tacqueti* demonstratione monenda occurrunt. Vera dixisset celebris hic auctor, si dixisset: imago bacilli B*a* apparet in directum iacens cum bacillo ipso: cum vero dixit:
Fig. 2. *est* in directum iacens, veritatem rei praeteruectus est. Nego itaque plane, in tali experimento imaginem reuera iacere in directum cum bacillo, quamuis oculo phaenomenon hoc ita appareat eique illudat. Quodsi enim aequa

qua lance trutinemus demonſtrationem tacquetianam, eius ratiocinium huc redit, vt ſequens exinde formetur ſyllogiſmus, quo probat punctum *a* eſſe in perpendiculari producta DAC: quicquid apparet in perpendiculari E*ad*, illud eſt in perpendiculari; ergo punctum *a* eſt in perpendiculari. Quod iam attinet ad minorem propoſitionem huius ſyllogiſmi, ea negari non poteſt, ſed omnino recte ſe habet et experimento comprobatur: ſed maior propoſitio vera non eſt, quod ſequenti nouo experimento teſtatum facio. Imponatur ſpeculo conuexo GAH gnomon chartaceus ABD, ita, vt crus AB perpendiculariter inſiſtat polo ſpeculi A, et crus BD antrorſum verſus oculum O ſpectet. Tum inſpiciatur imago huius gnomonis vno oculo, eoque ſic poſito, vt exiſtat in plano trianguli BAD: apparebit totius gnomonis ABD imago in ſpeculo A*bd* in lineam rectiſſimam extenſa, et iacens in perpendiculari BA protracta, vbicunque oculus in plano memorato verſetur. Idem experimentum ſimili ſucceſſu inſtitui poteſt, ſi polo ſpeculi A inſiſtat rectus tantum bacillus, ſed verſus oculum O inclinatus, cuius imago pariter in perpendiculari apparet. Iam ſi quis argumentari vellet: punctum *d* apparet in perpendiculari AB*b*, ergo exiſtit reuera in eadem: nonne *Tacquetus* ipſe huic aduerſaretur, dicendo: ſit DE radius incidens, et reflexus EO, ducatur cathetus incidentiae DC, ſecans reflexum retro productum in *d*, erit locus imaginis puncti D in *d*, extra perpendicularem BA*b*. Ex his igitur maniſeſtiſſimum eſt plane concludi non poſſe: imago rectae perpendiculariter inſiſtentis apparet in perpendiculari hac producta, ergo reuera ibi exiſtit. Accidit enim profecto Fig. 4.

 hic

hic fallacia optica, quae oculo illudit eodem modo, quo bacillum vel gnomonem in quouis plano horizontali verſus oculum inclinate erectum horizonti perpendicularem eſſe putamus, quod reipſa tamen longe aliter ſe habet. Apparebit enim ex vera determinatione imaginis in tali ſpeculo, §. 12. adducenda, ſi conſtructione geometrica mox indicanda res perficiatur, imaginem bacilli A*bd* reuera verſus oculum aſpicientem inclinatam eſſe, ſed declinatione ab ipſa perpendiculari BC tam parua, ſi oculus propius poſitus ſit, vt impoſſibile ſit eam ab oculo diſtigui. Valeat ergo *Tacquetus*, et cum eo recentiores ii omnes, qui putant ſe quam rigidiſſime demonſtraſſe, punctum in ſpeculum ſphaericum radians imaginem ſuam nanciſci ibi, ubi cathetus incidentiae radium reflexum ſecat.

§. 12. Reiecta igitur hac falſa opinione, accedam ad eam, quae vera, noua tamen non eſt, ſed inde iam a *Barrouii* temporibus, et ab ipſo, et ab aliis quibusdam, exculta fuit. Dico itaque, imaginis locum in ſpeculo quocunque ibi eſſe, vbi duo radii incidentes infinite vicini
Fig. 5. BM, Bm, poſt reflexionem, in M et m factam, concurrunt, vel ſe inuicem ſecant, ſcilicet in F. Vt itaque etiam quantitas huius rectae MF, in radio reflexo poſitione dato, ad vſus ſequentes in promtu ſit: notum eſt ex analyſi infinite paruorum *Hospitalii* §. 119. vocatis radio incidente BM$=y$, et demiſſa in hunc ex centro C perpendiculari CE, appellataque EM$=a$, futuram eſſe MF$=\frac{ay}{2y-a}$; quae eadem formula deducitur etiam ex conſtructione geometrica ea, quam *Barrouius* tradit lect. opt. lect. IX. §. 11. vbi ſubiungit, punctum F. eſſe locum ipſiſſimum,

circa

circa quem puncti B imago consistit. Vnde sequens oritur constructio geometrica pro inueniendo puncto F, quae in *Hospitalii* analysi infinite paruorum omissa est, in speculo sphaerico concauo: demittatur in incidentem perpendicularis ex centro C, quae sit CE, et ducatur in punctum reflexionis M radius CM; tum bisecta EM in G, ducatur GH parallela radio reflexo MF; secabit haec GH alicubi radium, scilicet in H; si itaque ex puncto radiante B per punctum H ducatur recta BHF, signabit ea in radio reflexo locum imaginis F quaesitum. Nam erit sic ob triangulum MGH aequicrurum, BG$(y-\frac{1}{2}a)$: GH$(\frac{1}{2}a)$ = BM(y) : MF $(\frac{ay}{2y-a})$. Quodsi autem radius incidens BM minor fuerit, quam $\frac{1}{2}a$ vel MG, fiet MF negatiua, atque tum sequens constructio locum habebit: demittatur in productam MB perpendicularis CE ex centro C, et ducatur in punctum reflexionis M radius CM, tum, bisecta EM in G, ducatur GH parallela radio reflexo retro producto MF, secabit haec GH alicubi radium, scil. in H; si itaque ex puncto radiante B, et puncto H, ducatur recta HB, secabit ea radium reflexum in loco quaesito imaginis F. Erit enim sic BG $(\frac{1}{2}a-y)$: GH $(\frac{1}{2}a)$ = BM(y) : MF $(\frac{ay}{a-2y})$. Similis constructio locum quoque habet in speculo sphaerico conuexo. Nam cum ibi y fiat negatiua, erit MF $= \frac{-ay}{-2y-a} = \frac{ay}{2y+a}$. Producantur itaque et radius incidens et reflexus retro; tum demissa in illum perpendiculari CE bisecetur ME in G, et per G ducatur parallela reflexo MF, secans radium in H, et ducta BH secabitur radius reflexus in F, loco imaginis quaesito. Est enim sic BG$(y+\frac{1}{2}a)$: GH $(\frac{1}{2}a)$ = BM (y): MF $(\frac{ay}{2y+a})$.

Fig. 6.

Fig. 7.

Ii 3 §. 13.

§. 13. Cum itaque duorum radiorum incidentium sibi proxime vicinorum focus quoque sit in reflexorum mutuo concursu: patet generaliter verum esse, quod locus imaginis ibi sit, vbi radiorum datur focus; adeoque focum, a puncto radiante productum, et eiusdem imaginem, esse vnum idemque. Iam vero videamus quoque, an casus aliqui dentur, in quibus veterum hypothesis in assignando loco imaginis coincidat cum hac vera. Igitur in sententia veterum, posito speculi centro in C, et ducta catheto
Fig. 5. incidentiae BCL, erit puncti radiantis B imago in L, in quo nempe puncto reflexus ML secatur. Pro determinanda autem ML, positis vt ante $BM = y$, $EM = a$, $CM = r$, et sinu toto $= 1$, erit CME sinus $= \frac{\sqrt{rr-aa}}{r^2}$ cosinus $= \frac{a}{r}$, adeoque dupli huius, nempe BML sinus $= \frac{2a\sqrt{rr-aa}}{r^2}$, cosinus $= \frac{\sqrt{(r^4-4a^2r^2+4a^2)}}{r^2} = \frac{\pm(r^2-2a^2)}{r^2}$; erit porro $BC = \sqrt{(BE^2+EC^2)} = \sqrt{(y^2-2ay+a^2+r^2-a^2)} = \sqrt{(y^2-2ay+r^2)}$, adeoque LBM sinus $= \frac{CE}{BC} = \frac{\sqrt{rr-aa}}{\sqrt{(y^2-2ay+r^2)}}$, cosinus $= \frac{BE}{BC} = \frac{y-a}{\sqrt{(y^2-2ay+r^2)}}$. Hinc componetur sinus $BLM = \text{sin.}\ BLN = \text{sin.}\ (BML+LBM) = \frac{2a\cdot\overline{y-a}\cdot\sqrt{rr-aa}+(r^2-2a^2)\sqrt{rr-aa})}{r^2\sqrt{(y^2-2ay+r^2)}}$; vnde instituta analogia: $\text{sin.}\ BLM : \text{sin.}\ LBM = BM : ML$, inuenitur $ML = \frac{r^2y}{2ay-2a^2\pm(r^2-2a^2)}$; qui valor ipsius ML, si ponatur aequalis valori ipsius $MF = \frac{ay}{2y-a}$, inuenitur $y = \frac{ar^2-2a^3}{r^2-a^2}$, vel $y = 0$. Si itaque radii incidentis BM longitudo habuerit alterutrum horum valorum assignatorum, locus imaginis ex veterum hypothesi coincidet cum loco imaginis vero; in omnibus vero reliquis casibus haec duo loca discrepabunt inter se.

§. 14.

§. 14. At vero memoratu dignum eſt, in ſolis ſpeculis planis hypotheſin veterum et hypotheſin veram, quam *barrouidnam* appellare licebit, coincidere, et vnum eundemque locum imaginis producere, quod certe in falſam opinionem veteres deducere potuit, quod credebant vniuerſaliter verum eſſe, quod in ſolis ſpeculis planis locum habet. Sit enim tale ſpeculum planum AC, punctum radians B, et radii incidentes infinite vicini BM, Bm, cum reflexis MN, mn; et quia recta AC, tanquam arcus circuli ſpectata, centrum habet infinite diſtans, erit in formula $\frac{ay}{2y-a}$ ponenda $a = \infty$, hinc erit MF$=\frac{ay}{-a} = -y$, hoc eſt, in retro producta NM erit capienda MF$=y=$MB. Coniungantur ergo puncta B et F recta linea, ſecatura ſpeculum in A; atque erit in duobus triangulis FAM, BAM, angulus $p=n=m$; MB$=$MF, et MA communis vtrique triangulo; quare triangula haec erunt aequalia et ſimilia; hoc eſt, apud A erunt anguli recti; eritque ſic punctum F in concurſu radii reflexi MN et catheti incidentiae BA.

§. 15. Ingerit denique ſe hic dubium quoddam, quod effecit, vt *Tacquetus* ſuam imaginis definiendae hypotheſin ſpeculis concauis non niſi in quibusdam caſibus conuenire aſſeruerit, quam in planis et conuexis vniuerſaliter veram eſſe contendit, prout videre licet in eius catoptricae libro III. prop. 29. et 30; et ad quod ne *Barrouius* quidem in recta ſententia reſponſionem inuenire potuit, ſed illud, *improbam difficultatem* vocatum, lect. opt. XVII. §. 13. tanquam ſcopulum praeteriit potius, quam ſuſtulit. Verſatur dubium hoc in eo, vt quaeſtio moue-

moueatur, in quonam loco appariturum ſit obiectum AB longius a ſpeculo remotum, oculo O proxime apud ſpeculum poſito. Si veteres audiamus, iuxta eorum ſenten-
Fig. 9. tiam ductis cathetis incidentiae A*a* et B*b* imago erit in *ba*; ſed intra hanc et ſpeculum ipſum ED oculus ſitus eſſe ſupponitur, et conſequenter incapax videndae imaginis *ba*. Idem vero accidit quoque, ſi puncta imaginis *b* et *a* legitima methodo, *barrouiana* nempe, quaerantur. Suſpenſa igitur hic et ambigua haeret theoria, docens obiectum videri per radios DO, EO, *tanquam ex infinito interuallo fluentes*, *et nihil hic reliquum eſſe*, *praeter merum praeiudicium*, *quo diſtantia imaginis aeſtimetur*. Vide annotationes ad *Rohalti* phyſicam, parte I. cap. 34. §. 18. Decidit vero atque ad oculum demonſtrat experientia, obiecta in his circumſtantiis apparere oculo erecta, naturali ſua magnitudine praedita, ſed aliquantum minus diſtincta. Qua ergo via huic veritati ratio ſua aſſignanda erit? Dico itaque: ſi obiectum fuerit remotius, et oculus valde propinquus ſpeculo, ſpatium reflectens ED eſſe, ne dicam infinite, ſed ita tamen paruum, vt pro ſpeculo plano haberi poſſit; quod ſequenti ratiocinio demonſtro. Ducantur radii EC, DC, nec non diameter GOCH, ponanturque radii GC, EC, DC, $= r$, CO $= a$, OD $= q$, OE $= p$; atque demiſſis in diametrum perpendiculis DK, EI, leui calculo inuenitur, eſſe OK $= \frac{r^2-a^2-q^2}{2a} = m$; et OI $= \frac{r^2-p^2-a^2}{2a} = n$, quare habebitur EOC ſinus $= \frac{\sqrt{pp-nn}}{p}$, coſinus $= \frac{-n}{p}$; nec non DOC ſinus $= \frac{\sqrt{qq-mm}}{q}$, coſinus $= \frac{-m}{q}$; vnde erit ſinus differentiae EOD $= \frac{-m\sqrt{pp-nn}+n\sqrt{qq-mm}}{pq}$. Iam vero ſit oculus O ſpe-

culo

culo ED valde vicinus, aut vero ſint q et p quantitates valde paruae, erit OC, ſiue a, fere aequalis radio r; ponamus itaque $a=r$, fiet hinc $m=\frac{-q^2}{2a}$, $n=\frac{-p^2}{2a}$; vnde ſinus EOD euadet $=\frac{q\sqrt{(4a^2-p^2)}-p\sqrt{(4a^2-q^2)}}{4a^2}$; quoniam vero vlterius reſpectu ipſius a euaneſcunt p et q, erit ſinus EOD $=\frac{q-p}{a}$, hoc eſt, quia q et p fere ſunt aequales, erit ſinus EOD fere aequalis nihilo, adeoque multo magis arcus ED pro portione ſpeculi valde parua, vel pro paruo ſpeculo plano habendus; vnde non mirum eſt, indicata phaenomena in eo ita occurrere, prout natura ſpeculi plani ea requirit; repraeſentatio tamen obiectorum debebit eſſe aliquantum obſcurior et confuſior, quam in ſpeculo per totum plano, quia hic ſe ex ſpeculis paruulis planis ſimilibus adiacentibus immiſcent nouae imagines, ad multiplicandam imaginem, ſed non cum integro effectu, tendentes. Neque praetereundum hoc loco eſt, allegatum phaenomenon, vt nempe imagines obiectorum remotorum erectae appareant in ſpeculo cauo, non cerni in tali ſpeculo, quod paruum ſit, et conuexitatem habeat magnam; oculus enim tam prope huic ſpeculo applicari non poteſt, vt ſpatium reflexionis efficiat valde paruum, ſeu vt efficiat ſpeculum paruum planum.

§. 16. Vt occaſione horum ex dioptricis quoque aliquid tangam, afferam coronidis loco methodum determinandi concurſum duorum radiorum infinite vicinorum, in lentem quamcunque incidentium, quorum radiorum fons, vel punctum radians, ab axe lentis vtcunque diſtet, et in vtraque ſuperficie lentis, in ingreſſu et egreſſu, hoc

 eſt,

est, duplicem refractionem patiantur. Sit igitur diaphanum ab äere diuersum, terminatum duabus superficiebus sphaericis $M m$, cuius radius $M C$, et $N n$, cuius radius $N k$; in hoc ex puncto radiante B quomodocunque sito incidant radii infinite vicini $B M$ et $B m$, qui post primam hanc refractionem vniantur in puncto F, sed post alteram refractionem in superficie $N n$ concurrant in puncto f; quaeritur determinatio puncti f, seu quantitas linae $N f$. Sit igitur radii incidentis $B M$ longitudo $= y$, et demissis ex centro C perpendicularibus in radium incidentem continuatum et refractum, quae sint CE et CG, sint $ME = a$, $MG = b$, sitque tandem ex äere in diaphanum ratio sinus inclinationis ad sinum anguli refracti $= m : n$, atque erit ex *Hospitalii* analysi infinite paruorum §. 133. $MF = \frac{b^2 my}{bmy - any - a^2 n}$; qui valor ipsius MF, cum vniuersaliter verus sit, locum quoque habebit in puncto f, si hoc tanquam radians concipiatur. Ponatur itaque radius incidens $fN = x$, sintque duo tales incidentes radii sibi infinite proximi fN, fn, qui post primam hanc refractionem punctum concursus versus B nullum habebunt, sed in diaphano infinito CK diuergentes versabuntur, aut vero habebunt focum virtualem in F; quodsi itaque ad analogiam radii prioris incidentis BM pro hoc incidente fN iam ponatur $NH = A$ $NL = B$, erit nunc eodem, quo prius, iure $NF = \frac{-B^2 mx}{Bmx - Anx - A^2 n}$ vbi scil. $m : n$ est ratio refractionis, vti ante, ex äere in diaphanum. Ex modo inuenta hac aequatione eruatur iam valor ipsius x, qui ergo inuenitur hic: $Nf = \frac{A^2 n}{Bm - An + \frac{B^2 m}{NF}}$.

Igitur, dato diaphano quocunque, terminato vtrinque superperficie circulari, ex gr. cuius centra ſint C et K, determinatur focus duorum radiorum viciniſſimorum, ex puncto radiante quomodocunque ſito egreſſorum, ſequenti modo: ducatur radius incidens productus B M E, atque huic conueniens aſſignetur refractus, huic refractioni primae debitus, qui ſit M F; ex centro C demiſſis perpendicularibus C E, C G, capiantur menſurae in ſcala geometrica ipſarum M E $= a$, et M G $= b$, quo facto calculus arithmeticus haud difficulter dabit numerum ipſius M F $= \frac{b^2 m}{bm - an - \frac{a^2 n}{y}}$; cum itaque vitrum vel diaphanum datum in charta delineatum eſſe ſupponatur: dabitur ex hac menſura quoque longitudo N F. Tum itaque ex aſſumto radio incidente M N, ducatur conveniens ipſi refractus N f, atque in hoc ſumta longitudine N $f =$ $\frac{A^2 n}{Bm - An + \frac{B^2 m}{NF}}$, determinatum erit f, punctum concurſus poſt duplicem refractionem, idque geometrice et accuratiſſime, non vero quam proxime tantum, vti communiter fieri ſolet. Vel ſi deſideretur conſtructio geometrica, illa pro determinando primum puncto F ex *Hoſpitalio* l. c. erit haec: fiat angulus E C $b =$ G C M, capiatur M $k = \frac{a^2}{y}$, fiatque $b\,k : b$ E $=$ M G : M F; pro inueniendo etiam porro puncto f fiat angulus L K Z $=$ H K N, addatur ad Z N recta N X $= \frac{B^2}{NF}$, et fiat Z X Z L $=$ H N : N f. Tab. IV. fig. 2.

Vt vero punctum radians reduci quoque poſſit ad axem talis diaphani, coniungantur centra C et K inter ſe linea recta producta vtrinque C K, atque ad hunc axem Fig. 1.

ex B demittatur perpendicularis Bα, ſintque $\alpha\beta = p$; $\beta C = r$ K N = R, nempe pro diaphano, ſuperficiebus circularibus praedito, $\alpha B = q$, craſſities diaphani ſiue lentis $= d$, eritque $BC = \sqrt{(\alpha B^2 + \alpha C^2)} = \sqrt{(BE^2 + EC^2)}$; retentis igitur antecedentibus adhuc denominationibus habebitur aequatio $\sqrt{(p^2 + 2pr + r^2 + q^2)} = \sqrt{(y^2 + 2ay + r^2)}$; vnde deducitur $y = \pm \sqrt{(p^2 + 2pr + q^2 + a^2)} - a$; valere autem poteſt ſolum ſignum $+$, vt ne radius incidens C M fiat negatiuus. Vt iam punctum radians ſit in ipſo axe lentis alicuius dioptricae, ponatur $q = 0$, eritque ſic iam $y = \sqrt{(p^2 + 2pr + a^2)} - a$, et $MF = b^2 m : [bm - \overline{an} - \frac{a^2 n}{\sqrt{(pp + 2pr + 2a)} - a}]$. Sint praeterea radii incidentes axi viciniſſimi, vt obtineatur focus principalis, poni debet $a = r$, $b = r$, et hinc $MF = \frac{r^2 m}{rm - rn - \frac{r^2 n}{p}}$; erit quoque A = R, et B = R, hinc generaliter pro omni lege refractionis oritur $Nf = \frac{nR(r \mp d.pm + r \mp p.nd)}{\overline{m-n}\,(\overline{r-d}.pm + \overline{r+p}.nd) + mR(\overline{m-n}.p - nr)}$ quae formula, ex genuina methodo deducta, coincidit cum illis, quae approximatione tantum deriuatae ſunt ab auctoribus, ſi pro refractione ex aere in vitrum ponatur $m = 3 . n = 2$. Si denique craſſities lentis negligatur, erit $Nf = \frac{npRr}{\overline{m-n}.\overline{R+r}.p - nrR}$; aut ſi fuerit $R = r$, quod in pleriſque lentibus obtinet, orietur $Nf = \frac{pr}{\frac{m-n}{n} 2p - r}$.

DE

DE CORPORVM PLANO INCLINATO IMPOSITORVM DESCENSV.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Corpus firmum, plano inclinato impositum, duplici modo descendere per plani longitudinem potest. Primo enim descensum suum absoluit vel sic, vt centrum eius grauitatis C describat lineam rectam *Cc*, plano inclinato *Eb* parallelam, atque vt latus corporis vnum idemque, veluti AB; semper plano inclinato maneat contiguum; in hoc casu corpus dicitur: *descendere simpliciter*, *descendere radendo*, vel *labi* aut *repere*. Deinde etiam quibusdam in casibus corpus solidum obseruari potest descensum suum in plano inclinato perficere sic, vt centrum grauitatis in eo C, aut describat durante descensu arcus circulares CD, DE, E*c*, circa angulos suos sibi succedentes B, F, G, H, tanquam circa totidem centra; aut vt ipsum circa se gyretur, quod id globo et cylindro transuersim plano tali impositis accidit; neque adeo vnum idemque latus AB, sed singula corporis latera successiue plano inclinato fiant contigua; in hoc casu corpus dicitur: *deuolui* vel *rotari*, vel *descendere voluendo*. Tab. IV. Fig. 3. Fig. 4.

§. 2. In horum casuum altero, quo nempe corpus rotando descendit per planum inclinatum, initium motus semper ita fit, vt corpus prono capite prolabatur, atque deinde denuo erectum simili rursus modo procidat. Analogus.

logus itaque huic lapſui caſus eſſe videtur is, in quo corpus, plano horizontali inſiſtens, pronum prolabitur, quotiescunque *linea directionis* in eo cadit extra baſin, qua inſiſtit plano horizontali. Voco autem *lineam directionis*
Fig. 3. lineam rectam CF, quae ex corporis centro grauitatis C perpendicularis ducitur ad horizontem D*b*. Quae procidentia, in plano horizontali facta, cum a figura corporis et ſitu lineae directionis dependeat; ſimiliter in plano inclinato locum habere viſa fuit. Atque hinc factum eſſe puto, vt celeberrimi auctores phyſici hucusque omnes in ea opinione fuerint: *corpus plano inclinato impoſitum rependo deſcendere, ſi linea directionis eius intra baſin cadat, qua plano inclinato inſiſtit; aliud vero corpus rotando deſcendere, ſi eadem linea cadat extra baſin eius.*

§. 3. In hac regula falſum eſt corpus ſemper rotando deſcendere, quotiescunque linea directionis cadit extra baſin. In multis enim caſibus contrariatur experientiae
Experim. 1. hoc aſſertum; vt, *ſi capiatur* ex. gr. *parallelepipedum ligneum, altum* 3 *poll. latum* 2, *craſſum* $1\frac{1}{2}$, *atque illud imponatur plano inclinato eousque eleuato, vt linea directionis* CF *manifeſto cadat extra baſin; obſeruabitur, illud non rotando, ſed rependo deſcendere*, quod tamen accidere non deberet. Vt igitur in hac re non tam facili, ac prima quidem fronte videri poſſet, ingenium naturae addiſcerem, ſequenti primum modo ratiocinatus ſum.

§. 4. Quoniam in omni motu a grauitate oriundo centrum grauitatis deſcendit, quantum poteſt et vbicunque poteſt: putaui exinde ſecuturum eſſe, vt, ſi rotatione corporis ingruente centrum hoc deſcendere poſſit, corpus

pus rotaretur; sin autem, rotatione corporis supposita, centrum grauitatis ascendere in altum deberet, in eius locum reptionem successuram esse. Veluti, quia centrum grauitatis C, supposita rotatione circa G, tanquam fulcimentum, descendit per arcum circularem CH, neque in hoc casu supposita rotatio corporis ascensum aliquem centri grauitatis requirit: putaui futurum esse, vt corpus sic locatum rotando descenderet. Verum enim vero et huic explicationi plane repugnat experientia, atque etiam experimentum I. modo allegatum. Deinde congruit penitus eadem haec regula cum vulgari hucusque vsitata, quod paulo post deprehendi, et sequentem in modum demonstro. Fig. 5.

§. 5. Quotiescunque centrum grauitatis descensurum esset, supposita rotatione, toties linea directionis cadit extra basin corporis. Nam sit corpus ECI plano inclinato AD ita impositum, vt supposita rotatione circa E centrum grauitatis C descendat per arcum CG, ducatur per E recta horizontalis FEG, cum verticali EH ex E educta. Necesse igitur est, vt centrum grauitatis corporis C sit alicubi in quadrante circuli descendente HCG, non autem in quadrante circuli ascendente FH. Si igitur centrum grauitatis fuerit in C, ex eo demissa linea directionis CB parallela erit cum recta EH, et versus partes G iacebit; cadet ergo extra punctum E, hoc est, extra basin corporis KE; consequentur, si quis dixerit, subsequente rotatione centrum grauitatis descendere, idem dicit, ac corporis lineam directionis cadere extra basin. Fig. 6.

§. 6. Voti igitur mei hac opera compos non factus, deprehendi ex variis ab initio institutis tentaminibus potius

quam

quam experimentis: *corpus, quod in plano inclinato descenderet rependo, si libere sibi permittatur, ex quiete ipsi conciliata concitari in motum rotatorium*: *et prono capite prolabi, si filum, etiam tenue, aut fascia chartacea, ipsi transuersim opponatur primum, atque tum demum illud sibi relinquatur, et simul linea directionis extra basin cadat.* Deinde porro aliquoties vidi, *corpus quod in plano inclinato descendit rependo, descendere rotando in eodem, si planum obducatur panno aliquo rudiori et aspero, etiamsi linea directionis cadat vtrobique extra basin.* Vnde manifestum fit, deberi haec phaenomena vnice asperitatibus plani inclinati, modo maioribus modo minoribus, atque in his caussam eorum esse quaerendam. In qua sententia eo magis confirmatus fui, cum viderem, *corpus in vna plani inclinatione rependo vel rotando descendens, in omnibus aliis plani inclinationibus simili modo descendere.*

§. 7. Ex his mihi enata fuit sequens theoria, quam explicatam prius dabo, vt deinde eo applicatius varia experimenta adducere possim, quae eam optime confirmant. Fig. 7. Sit plano inclinato BD impositum corpus quodcunque FCI, cuius centrum grauitatis G, basis FI; sintque praeterea AB linea horizontalis, huic perpendicularis AD, et corporis linea directionis CG. Manifestum nunc est, corpus hoc deorsum sollicitari a pondere suo respectiuo, hoc est, a potentia, quae, posito corporis pondere absoluto $= P$, inuenitur esse $= \frac{AD}{DB} \times P$. Hac potentia sollicitatur quidem corporis centrum grauitatis, eidemque perfecte obediret quoque corporis basis IF, nisi obesset ipsi scabrities plani, aut frictio eius in hac inclinatione

natione ſub angulo ABD reperiunda, quam frictionem vocabo f. Cum autem motui baſeos frictio obſtat, efficit ea, vt in punctum quoduis baſeos, plano inclinato contiguae, agere cenſeri tantum poſſit potentia $\frac{AD}{DB} \times P - f$. Quantum autem praeualet potentia agens in centrum grauitatis ſupra potentiam agentem in punctum baſeos quodcunque F: tantum increſcit potentia corpus ad rotationem ſollicitans, vt hinc differentia harum potentiarum, quae eſt f, pro potentia corpus ad rotationem impellente aſſumi poſſit; quoniam per potentiam, quae protrahit baſin corporis, hoc ſe motui rotatorio quaſi ſubducit in ſingulis momentis. Agit autem haec potentia rotatoria in C, atque ſic in brachium vectis homodromi CF, quia rotatio circa punctum F, tanquam circa hypomochlium peragi debet. Momentum itaque huius potentiae rotatoriae, vecti CF applicatae, demiſſa ex C perpendiculari CE ad DB, erit $= f \times CE$. Haec potentia rotatoria integrum effectum ſuum ederet, ſi planum BD eſſet verticale, et puncto F aliquid reſiſteret; neque adeo pars ponderis P corpus ad planum inclinatum adhuc apprimeret. Ergo ſequitur hinc, inter duas has potentias, priorem rotatoriam atque hanc alteram, quam *appreſſoriam* voco, dari conflictum eſſeque hanc illi contrariam, vt ſi illa vincat, corpus rotando, ſi vero haec praeualeat; corpus rependo deſcendat. Vt igitur definiatur potentia appreſſoria, exponatur corporis pondus abſolutum P per CG verticalem, atque reſolvatur ea in CE perpendicularem ad planum, quam voco *lineam appreſſionis*, et CK, plano BD parallelam; eritque magnitudo potentiae appreſſoriae $=$ CE; quoniam vero etiam haec agit in vectum

C E : erit eius momentum $= CE \times EF$. Orietur itaque haec regula ; *corpus plano inclinato impositum descendere rotando, si fuerit* $f \times CE > CE \times EF$, *aut vero* $f > EF$; *idem autem corpus descendere rependo, si fuerit* $f < EF$.

§. 8. Hinc, vt casus pro rotatione vel pro reptione determinentur, determinari antea oportet frictionem, quam planum sub data inclinatione in basin corporis exercet. Cum autem difficilius frictio haec explorari possit in plano inclinato, quam in horizontali : vocabo hic in subsidium theorema ab excellentiss. *Bulffingero* in *Commentariorum Tomo II. pag.* 405. traditum ; quo ad schematismum meum reuocato, et vocata frictione horizontali F, habetur $f = \frac{AB}{DB} \times F$. Est autem ob similia triangula D A B et G E C, $\frac{AA}{DB} = \frac{CE}{CG}$, vel, ob $CG = P$, erit $\frac{AB}{DB} = \frac{CE}{P}$, et hinc $f = \frac{CE}{P} \times F$. Ex quibus regula fluit haec, iam magis concinna : *corpus plano inclinato impositum descendere rotando, si fuerit* $F > \frac{EF}{CE} \times P$; *idem autem corpus descendere rependo, si fuerit* $F > \frac{EF}{CE} \times P$.

§. 9. Eruta nunc regula pro definiendo quolibet motu corporis plano inclinato impositi, superest, vt ea ad experimenta, tanquam ad lapidem lydium, exploretur videaturque, an experientiam sibi habeat amicam, nec ne. Cum autem pro instituendis iam experimentis requirantur mensurae exactae frictionis horizontalis rectarum E F, C E, et ponderis absoluti : exponam antea breuiter, qua ratione corporis cuiuscunque sub examen vocati centrum grauitatis et frictionem horizontalem explorauerim; quoniam

niam ex illo inuento dimenſiones rectarum E F, C E, per ſe fluunt, et pondus abſolutum bilance accurata quam facillimum eſt inuentu.

§. 10. Pro cognoſcendo centro grauitatis in corporibus, quae disquiſitioni meae ſubieci, ſuſpendi ea ex filo ſerico tenuiſſimo, ope cerae agglutinato, in variis ſuperficiei punctis eousque, donec aliquod reperirem, ex quo ſuſpenſum corpus ſuperiorem ſuperficiem haberet perfecte horizontalem; atque tum in directione fili ſuſpendentis perfoſſa cera mediante acu ſubtili, centrum quaeſitum anguſto puncto notaui et expreſſi. Sed ſic quidem obtinui ſolum centrum grauitatis ſuperficiei ſuperioris. Quoniam vero in experientiam non vocaui, niſi corpora, quae conſtant ex materia homogenea et ſunt figurae priſmaticae; centrum ipſum grauitatis in medio huius inuenti axis, ad ſuperficiem ſuperiorem perpendicularis, tuto aſſumere licet.

§. 11. Ad determinandam frictionem horizontalem horum corporum adhibui planum, in ſitum horizontalem prius exactiſſime redactum. Huic impoſui corpus, illique ope cerae agglutinaui ex parte propiori baſi filum ſericum tenue, recta protenſum, et horizontaliter exiens, trochleamque mobiliſſimam, in extremo plani firmatam, ambiens et lancem affixam ſibi gerens; huic deinde lanci tot ſucceſſiue ponduſcula impoſui, donec ea iamiam inciperent quietem corporis plano impoſiti ſollicitare; quae ponduſcula vna cum pondere lancis pro menſura frictionis horizontalis tenui.

§ 12. Vt igitur ratio reddatur experimenti I. supra allegati, in quo corpus, cuius linea directionis manifesto cadit extra basin, rependo tamen descendit: assumo regulam inuentam, in qua pro reptione corporis requiritur tantum, vt sit $F < \frac{EF}{CE} P$. Sunt autem pro quolibet corpore et rectae EF, CE, et frictio horizontalis F eaedem, pendentes nempe illae a situ centri grauitatis versus basin, neque hic in computum cadit recta FG, quae lineam directionis definit. Poterit igitur planum BD eousque pro lubitu eleuari, imposito corpore quocunque, donec tandem huius linea directionis extra basin cadat, neque idcirco valor ipsius $\frac{EF}{CE} \times P$ mutabitur. Si enim in minima plani eleuatione est $F < \frac{EF}{CE} \times P$, aut $F > \frac{EF}{CE} \times P$, in maxima eleuatione et in omnibus intermediis res eodem modo se habebit; vnde simul etiam causa patet experimenti IV, superius adducti; quod, etsi mirum ab initio videatur, ex hac tamen theoria prono alueo fluit et deriuatur. Ex eadem hac regula, quae casum reptionis definit, deducitur quoque facile experimentum III, antea allatum. Cum enim pro reptione requiratur $F < \frac{EF}{CE} \times P$, et haec posterior quantitas pro dato corpore maneat constans: poterit, aucta asperitate plani, quod per varios pannos diuersae texturae successiue ipsi impositos fit, frictio horizontalis ita tandem augeri, vt desinat esse $F < \frac{EF}{CE} \times P$, sed contrarium accidat, quo obtento rotatorius motus consequitur. Neque difficilius explicatu est experimentum II. Cum enim, vti supra iam dixi, §. 7. per potentiam, quae protrahit basin, corpus se motui rotatorio singulis momentis quasi subducat: euidens est, fieri debere,

debere, vt, potentia protrahente basin per obstaculum transuersum fixum penitus exhausta, motus rotatorius vim suam exerceat eo liberius, atque proinde corpus pronum in caput prolabatur, eo modo, qui in similibus corporibus plano horizontali insistentibus contingere solet.

§. 13. Praemissis hisce generalioribus descendam nunc ad magis particularia, in sequentibus exponenda et ope eiusdem huius regulae explicanda. Igitur *corpus ligneum C, quod horizontali plano impositum eadem base, qua hic plano inclinato incumbit, tutum erat a lapsu, rependo descendit in omnibus inclinationibus, quantumuis linea directionis extra basin cadat, per plana laeuigata, buxinum, chartaceum et quernum; sed per planum asperum panni vulgaris rotando cursum absoluit suum.* Instituta dimensione determinationum necessariarum deprehendi eius pondus absolutum, seu P, = 1277 Granorum, quorum 7680 faciunt libram amstelodamensem; CE = 51 partium, quarum 382 faciunt pedem londinensem, EF = 18 part. Porro inueni frictionem horizontalem in plano buxino 346 Gran. in chartaceo 316 Gr. in querno 350 Gr. in panno aspero autem 716 Gr. Igitur in hoc corpore erat $\frac{EF}{CE} \times P = 450$. Est hinc in primis tribus planis F, hoc est, 346 aut 316 vel $350 < 450$; quare in his planis obtinuit motus reptorius. In panno aspero autem fuit $F = 716 > 450$, quare in hoc corpus descendit rotando. Exper. V. Tab. V. Fig. 1.

§. 14. Sed multo adhuc melius theoriam hanc comprobat experimentum sequens, quod in hunc finem ita perfeci. *Corpus ligneum C, quod horizonti insistens lapsui* Exper. VI. Fig. 2.

 resi-

resistere non poterat, rotando descendit in omnibus inclinationibus planorum modo memoratorum, buxini, chartacei, et querni. Captis mensuris inueni in eo $P = 1207$ Gr. $CE = 53$ part. $EF = 0$; frictionem horizontalem vero inueni huius baseos in plano buxino 245 Gr. in chartaceo 136 Gr. in querno 296 Gr. Igitur in hoc corpore erat $\frac{EF}{CE} \times P = 0$, et consequenter in enumeratis planis omnibus erat $F > \frac{EF}{CE} \times P$; quare rotando descendit corpus.

Exper. VII. Fig. 3. §. 15. *Idem autem corpus modo memoratum, plano inclinato situ tantum inverso impositum, rependo descendebat per buxum, chartam et quercum.* In hoc casu est vti antea $CE = 53$, $EF = 32$, reliqua autem manent vti in experimento praecedente. Quare nunc habebitur $\frac{EF}{CE} \times P = 728$ gr. Est itaque $F = 245$ vel 136 aut $296 < 728$, veluti hoc facta reptio postulavit. Patet igitur ex hoc et praecendente experimento, posse eandem basin modo rependo, modo rotando devehere corpus sibi impositum, prouti situm ea acquirit, qui huic aut alteri motui fuerit conueniens.

§. 16. Examinaui deinde corpus prismaticum octogonum ligneum, transuersim plano inclinato impositum, Exper. VIII. Fig. 4. *quod obseruaui repere in quercu, et rotari in panno aspero.* In illa frictio horizontalis lateris repentis erat 296 gr. in hoc autem lateris rotati 700 gr. et porro erat $CE = 31$, $EF = 13$, $P = 1661$, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 696$ gr. At vero in casu experimenti primo est $F = 296 < 696$, hinc corpus motum reptorium sequebatur, in altero vero casu est $F = 700 > 696$, hinc corpus motui rotatorio obediuit.

§. 17.

§. 17. *Cubum tiliaceum obseruaui repere in quercu, sed rotari in panno aspero.* In illa erat frictio horizontalis 656, in hoc 2036. $CE = EF = 42$, $P = 1940 = \frac{EF}{CE} \times P$. Cum itaque in quercu sit $F = 656 < 1940$, haec reptionem effecit. In hoc autem est $F = 2036 > 1940$, igitur motus rotatorius consequebatur. Exper. IX. Fig. 5.

§. 18. *Adhibui cubum vitreum politissimum, qui in plano querno rependo descendit.* Erat in hoc $P = 9369$ gr. $CE = EF = 37$ part. et frictio horizontalis $= 1556$ gr. Cum itaque hic sit $F = 1556 < 9369$, necesse est, vt motus reptorius obtineat. Exper. X. Fig. 5.

§. 19. *Parallelepipedum vitreum, hedra sua minori quadrata planis impositum, in quercu repebat, in panno rotabatur.* Erat in hoc $P = 3486$ gr. $CE = 47$, $EF = 20$, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 1483$ Frictionem horizontalem obseruaui in quercu 1136, in qua repebat, quia $1136 < 1483$. Sed in panno inuenta fuit frictio horizontalis $1556 > 1483$, hinc in panno rotabatur. Exper. XI. Fig. 6.

§. 20. *Idem parallelepipedum vitreum, hedra sua maiori, rectangula, planis impositum, in quercu repsit, et in panno.* Erat enim, vti ante, $P = 3486$, $CE = EF = 20$, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 3486$, et consequenter in quercu $F = 1106 < 3486$; nec non in panno $F = 1496 < 3486$ Exper. XII. Fig. 5.

§. 21. *Aliud parallelepipedum vitreum, minus quam praecedens, iterum hedra sua minori, quadrata, planis impositum, in quercu repende, in panno rotando, descendit.* Mensuras ineundo deprehendi $P = 1774$, $CE = 42$, $EF = 15$, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 633$, et frictio horizontalis erat Exper. XIII. Fig. 6.

in

in plano querno $= 506$, ſupra pannum autem 686. Igitur, quia in quercu $F = 506 < 633$, hic rependo deſcendit. Sed quia in plano panneo fuit $F = 686 > 633$; in hoc rotabatur.

Exper. XIV. Fig. 5. §. 22. *Idem parallelepipedum vitreum minus impoſui nunc hedra ſua maiori rectangula plano querno et panneo, et vidi, in vtroque illud rependo deſcendere.* Erat enim, vt ante, $P = 1774$, $CE = EF = 15$, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 1774$; et deprehenſa fuit frictio horizontalis in illo $= 536$, in hoc autem $= 746$, quare in vtroque $F = 536$ vel $746 < 1774$, vnde motus reptorius in vtroque plano corpori huic vitreo placuit.

§. 23. Quoniam autem adhibui pannum rudiorem, laneum, ex filis craſſioribus contextum et hirtum, aliquoties obſeruaui, dari in eo circa corpora leuiora exceptiones quasdam, niſi ſumma cautio adhibeatur, pilis prominentibus elaſticis ſine dubio adſcribendas, quia hi pili extantes, elaſtici, in corpus non ſatis ponderoſum ſatis efficaciter, illud eleuando, agere poſſunt. Ita ex. gr. vidi, *corpus ligneum*, quod ſuperiori experimento V. in §.
Exper. XV. Fig. 7. 13. allegato inſeruierat, *plano horizontali ligneo aut alteri glabro*, AB, *impoſitum in ſitu* DCE *vel* dce *ſupra baſin* CD *quieſcere*; *ſimilibus vero modis panno allegato impoſitum, in vtroque caſu in faciem* CE, *aut* ce, *procumbere.* Quod certe phaenomenum, ſatis paradoxum, nulli alteri cauſae, quam modo memoratis fibris extantibus elaſticis panni rudioris adſcribere poſſum.

§. 24. Patet itaque ex omnibus his experimentis, ea theoriam et menſuram ſuperius expoſitam confirmare quam pulcher-

pulcherrime, ita, vt nullus dubitem, eam naturae atque eius operationibus in hoc negotio esse conformem. Patet etiam exinde per se, *corpora omnia sphaerica et cylindrica, transuersim plano cuicunque, etiam minimae asperitatis, imposita, rotando descendere.* Fit enim in his omnibus $EF = o$; quare si vel minimam frictionem horizontalem habeat tale corpus, erit semper $F > \frac{EF}{CE} \times P = o$, prouti hoc motus rotatorius requirit. Exper XVI. Fig. 8

§. 25. Si vero quaestio sit de plano et corpore imposito, perfecte politis et omnis frictionis expertibus, ne tum quidem theoria hucusque vsitata phaenomenis satisfacere potest. Requiritur enim pro motu rotatorio, vt sit $F > \frac{EF}{CE} \times P$; ergo si $F = o$, requiritur vt sit $o > \frac{EF}{CE} \times P$ quod aliter fieri nequit, nisi, si EF fiat negatiua, hoc est, Tab. IV. nisi cadat in alteram oppositam partem respectu puncti E Fig. 7. Tab. V. At vero tum recta CE vel linea *appressionis* cadit ex Fig. 9. tra basin corporis FI. Sin itaque pro plano perfecte polito regula sit accommodanda, respici debet ad lineam appressionis, non vero ad lineam directionis; in plano autem solo horizontali coincidunt lineae directionis et appressionis. Consequenter *in plano inclinato perfecte polito corpus descendit rotando, si linea appressionis cadit extra basin; descendit vero rependo, si linea appressionis cadat intra basin corporis.* Neque adeo, si et planum inclinatum et basis corporis impositi perfecte polita forent, corpus semper rependo descensurum esset.

§. 26. Postquam communicassem hoc problema cum Cel. *Dan. Bernoulli*, Academiae nostrae Membro meritissimo,

 per

perſcripſit is beneuole ad me ſolutionem ſuam, quae principiis quidem paulo diuerſis a meis vtitur, ſed cum conclusione mea plane coincidit, quam proinde honoris cauſa hic recenſebo, ſed redactam in compendium. Solutio
Fig. 10. Celeb. viri *ex epiſtola d. d. Baſileae 6. Aug.* 1740 huc redit. Sit A B horizontalis, A C verticalis, CB ſectio plani inclinati, DF ſectio baſis corporis in plano inclinato, centrum grauitatis corporis in plano inclinato, centrum grauitatis corporis in H, verticalis, ſiue linea directionis, HG, quae ſimul exprimat pondus corporis abſolutum. Reſoluatur HG in HL et HE, potentias laterales, illam parallelam, hanc perpendicularem plano inclinato. His poſitis erit in F, vbi baſis corporis impoſiti deſinit, vel obſtaculum aliquod inuincilibe, quod corpus ſiſtat quidem, ſed non impediat quin prolabatur, vel non aderit tale retinaculum. Sin adfuerit tale obſtaculum, tunc palam eſt futurum eſſe, vt potentia HL multiplicata per ſuum vectem HE conetur corpus voluere; et potentia HE, multiplicata per ſuum vectem EF, conetur corpus in ſitu ſuo ſeruare: ſequitur hinc, corpus prolapſurum eſſe, ſi fuerit $HL \times HE > EF \times HE$, aut $EG > EF$, hoc eſt, ſi linea directionis ceciderit extra baſin DF. Sed e contrario corpus in ſitu ſuo manebit, ſi fuerit $EF \times HE > HL \times HE$, aut $EF > EG$, hoc eſt, ſi linea directionis ceciderit intra baſin corporis DF. Vnde concludit Vir celeberr. factum fuiſſe, vt hac proprietate auctores quidam abuſi ſtatuerint, eandem quoque obtinere, ſi corpus ab obſtaculo inuincibili non retineatur, ſed actu deſcendat.

§. 27. In altero autem caſu, ſi obſtaculum nullum adſit, quod deſcenſum impediat, rem aliter ſe habere con-

concludit. Namque tum potentiam HL duplicem habere effectum, quorum vnus conatur, vt antea, fubuertere corpus, alter vero accelerare corpus. Si igitur iam frictio omnis abfit, fore vt vis accelerans fola praepolleat, neque vnquam corpus rotari pofit. Si vero frictio detur in plano, fubire illam vicem alicuius retinaculi firmi, atque fic potentiam HL actu diuidi in accelerantem et fubvertentem; et pofita frictione horizontali $= R$, effe vim acceleratricem $= HL - \frac{AB}{CB} \times R$, et vim fubuertentem $=$ HL minutae vi acceleratrice, vel $= HL - HL + \frac{AB}{CB} \times R = \frac{AB}{CB} \times R$. Itaque porro momentum potentiae rotatoriae vel fubuertentis effe $= \frac{AB . HE}{CB} \times R = \frac{HE^2}{HG} \times R$; fed momentum potentiae contrariae $= HE \times EF$. Vnde deducitur, corpus repere, fi fuerit $HE \times EF > \frac{HE^2}{HG} \times R$, aut $\frac{EF}{HE} \times P > R$; rotari vero et repere fimul, fi contrarium accidat, quo in cafu oriatur motus mixtus ex reptorio et rotatorio, etiam in ipfis fphaeris defcendentibus. Monet tandem Vir acutiffimus, haec omnia ita fe habere, fi frictio ponatur conftanter eadem et vniformis, neque dependens a velocitate corporis; fi vero haec ita fe non habeat, intelligi debere per R frictionem horizontalem corporis, ea velocitate moti, quam fuper plano inclinato defcendens habet in dato loco.

DE VIRIBVS ATTRACTIONIS MAGNETICAE EXPERIMENTA.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1

Quod ferrum trahat magnes, occulta ac ne hodie quidem detecta ratione, Thaleti Milesio iam cognitum fuisse perhibet Aristoteles de anima lib. I. cap. 2. adeoque mirandi huius effectus cognitio aetatem suam deducit ab ipsis philosophiae naturalis initiis. Deriuata ad nos est per longinquam aetatum seriem huius phaenomeni notitia magis, quam scientia, cum nemo repertus fuerit, qui regulas et leges, quas tenet, industria peruestigatione eruere conaretur, vsque ad haec nostra tempora, in quibus demum ea cura animos incessit, vt in mensuram attractionis magneticae inquirerent. Cum itaque leui experimento constare possit, ferrum validissime attrahi a magnete in immediato vtriusque contactu, debilius in aliquo vnius ab altero interuallo, et tandem plane non, in distantia nimis remota: videtur exinde certe hoc patere, attractionis huius vim habere legem in mutua horum corporum a se inuicem distantia fundatam; quaenam vero sit illa lex, aut quaenam comparatio distantiarum, attractionis magnitudinem indicans, id experimentis solertissime institutis definiendum quidem esset, sed nondum definitum est.

§. 2.

§. 2. Imperfectioni certe huius disquiſitionis adſcribi debet, quod facile ſit catalogum texere illorum, qui experimenta huic vſui inſeruientia inſtituerunt atque iis attractiones magneticas ad menſuras ſuas reuocare ſtuduerunt. Oſtendunt monumenta Societatis Regiae Anglicae, primos ibi labores huic rei inſumtos fuiſſe, atque *Hauksbeium*, optime gnarum, quantum ad proprietates magnetis referat, ſcire proportionem virium attractricium ad diuerſa interualla, diligentiſſime captis experimentis huic ſtudio incubuiſſe. Methodus ab ipſo adhibita his obſeruationibus iuſſu Societatis Regiae emendata fuit a *Tayloro*, et denuo magis perfecta a *Whiſtono*, qui reperiſſe ſibi viſus eſt, ſequi has attractiones quam proxime rationem diſtantiarum ſesquiduplicatam, vel, poſita diſtantia magnetis et ferri $= d$, quantitate conſtante $= \alpha$, eſſe attractiones magneticas inter ſe vti $\frac{\alpha}{a^{1\frac{1}{2}}}$. *Taylorus* vero, ſuis innixus tentaminibus, deprehendit, easdem attractiones non eſſe vti $\frac{\alpha}{a^2}$, neque vti $\frac{\alpha}{a^3}$, quae omnia leguntur in Tranſact. anglicanis Nr. 368. *Newtonus* ex captis quibusdam a ſe experimentis ſtatuit, decreſcere attractionem hanc in ratione fere triplicata diſtantiae in receſſu a magnete, vel eſſe eam vti $\frac{-\alpha}{d^3}$, in princip. p. 368.

§. 3. Omnibus autem in ſedula huius rei indagatione palmam praeripuit hodie Celeberr. Petrus van *Muſchenbroek*, qui in eximia diſſertatione phyſica experimentali de magnete nulli operae neque labori pepercit, vt experimentis prudentiſſime inſtitutis veram huius negotii legem et proportionem, naturae operationibus conformem, deprehenderet. Poſtquam vero omnem lapidem mouiſſet, fateri tandem coactus est, nullam se inuenisse distantiarum functionem, quae proportionem attractionis exhiberet; neque etiam fieri attractionem ferri ad magnetem in proportione aliqua magnitudinis superficiei, quae magneti opponitur. Tandem autem in edito hoc anno opere praeclarissimo, *Essai de Physique* pag. 280. detexit, dari aliquam inter attractiones duarum sphaerarum, magneticae et ferreae, aequalium proportionem, easque esse in ratione inuersa quadruplicata spatiorum cauorum, quae interposita sint successiue inter vtramque sphaeram. Vt si sint duae sphaerae aequales, magnetica A B et ferrea C D, esse attractionem magneticam pro diuersis distantiis E F in ratione inuersa quadruplicata spatii interpositi cylindracei A C F D B E. Quam regulam haud sane inconcinnam, experimento, quod ibidem affert, optime probat in duabus sphaerulis aequalibus, quarum diameter erat 0, 95 pollicis londinensis duodecimalis.

Tab. VI. fig. 1.

§. 4. Quam primum itaque mihi nobile hoc inuentum innotuit, statim ingens cupido animum meum incessit, id variis nouis experimentis examinandi atque inquirendi, an veritas vbique hic sibi constet; an haec proprietas ad sphaeras inaequales se extendat; an in duabus sphaeris magneticis quoque obtineat, nec ne. Adhibui itaque sequentem methodum, vt in tabula, ex qua omne ferramentum remoui, suspenderem bilancem exactissimam, eo plane modo, qui in celeb. *Grauesandii* physices elementis mathematicis ad vsus hydrostaticos Tab. XXVII. figura *l* depingitur et describitur. Cepi deinde tres globos, magneticos duos, ferreum vnum, de quibus in sequenquentibus ſermo occurret, quorum dimenſiones ſunt ſequentes in partibus, quarum 120 efficiunt pedem londinenſem. Erat nimirum globi magnetici maioris pondus $1726\frac{1}{2}$ granorum talium, quorum 7680 efficiunt libram hollandicam, diameter autem 14 part. ante memoratarum. Globi denique ferrei, qui magnetico maiori aequalis eſt, pondus deprehendi $2798\frac{1}{2}$ Gran. et diametrum eandem cum priori, nempe 14 part. Vbi obiter tantum hoc adiicio, me occaſione horum globorum indagaſſe quoque methodo conſueta hydroſtatica magnetum a me adhibitorum, qui ex metallifodinis ſibiricis allati ad nos ſunt, denſitatem, quam fruſtra in tabulis huic ſcopo conditis quaeſiui, eamque inueniſſe in vno eorum 4, 806, in altero 4, 778 poſita aquae purae denſitate 1, 000. Fuerunt hi globi omnes extus exacte laeuigati, et materiae ad ſenſum bene homogeneae; quod idcirco adnoto, quia primo facto tentamine, in quo globus ferreus ſuperficiem nondum ſatis politam tenebat, aliae prodierunt attractiones, regulae allegatae non conuenientes.

§. 5. Poſtmodum igitur, ſuſpenſo ex vna lance magnetico globo, ita vt axis eius verticalis eſſet, impoſui alteri lanci tot ponduſcula, quot requirebantur ad exactiſſimum aequilibrium reſtituendum in bilance. Quo obtento auxi haec ponduſcula dimidio grano, vno, et ſucceſſiue pluribus granis, ex quo noua praeponderatio lancis ponderibus onuſtae ſequebatur. Tum vero leniter demiſi integram bilancem ope funiculorum, quibus ſuſpenſa eſt, eamque tamdiu magis magisque ſuppoſito verticaliter globo ferreo admoui, donec vltima haec facta praeponderatio

ratio attractionis vi rediret ad priſtinum aequilibrium Deinde diſtantiam inter ſummitates vtriusque globi dimenſus ſum circino, qui totus ex orichalco confectus eſt; atque ſimul ſemper caui, vt ne contingerent ſe hi duo globi, durante primo experimento, vtque ſic ferrum illibatum et magnetica vi nulla imbutum tenerem. Diſcrepat itaque in aliquibus circumſtantiis haec mea operatio à musſchenbroekiana, ſed hac ratione mihi viſus ſum optime inſtitutum meum poſſe peragere.

§. 6. Aſſidua igitur patientia et multo labore obtinui ſequentes obſeruationes, quas nunc ſuo quamque ordine recenſebo; poſtquam hoc vnicum adhuc adnotauero, globum ferreum poſt peractum primum experimentum adhaeſiſſe quidem magneti: ſed tam parum exinde recepit virium, vt in ſcobe ferrea volutus fere nihil huius attraxerit. Igitur *primo* 1740 Febr. 24, ſt. v. poſt meridiem ſuſpendi globum magneticum maiorem ex bilance, ſic, vt polus eius boreus ferrum reſpiceret, illique ſuppoſui ferreum aequalem in linea verticali, atque ſic ſequentes obtinui numeros:

Obſeruatio	Diſtantiae Globor.	Attractiones
I - - -	$8\frac{3}{5}$ part. - - -	$\frac{1}{2}$ Granum
II - - -	6 —— - - -	1
III - - -	$4\frac{4}{5}$ —— - - -	2
IV - - -	$3\frac{4}{5}$ —— - - -	3
V - - -	3 —— - - -	4
VI - - -	$2\frac{4}{5}$ —— - - -	5
VII - -	0 —— - - -	1977

Secundo

Secundo deinde ſimile experimentum feci cum ſphaera magnetica minore, cuius polus boreus deorſum ſpectabat, et cum eodem, quo prius, globo ferreo, vt deinde eruere poſſim, an eadem memorata proportio locum quoque obtineat inter duas ſphaeras inaequales. Hic inueni Iulii 10, ante merid. ſequentia:

Obſeruatio	Diſtantiae Globor.	Attractiones
I	$14\frac{1}{2}$ part	$\frac{3}{4}$ Gran.
II	9	1
III	4	2
IV	2	3
V	0	67

Tertio iterum adhibui Auguſti 30. ante merid. ſphaeram magneticam minorem, in qua nunc polus boreus ſurſum ſpectabat, et ferream eandem, atque deprehendi haec:

Obſeruatio	Diſtantiae Globor.	Attractiones
I	4 part.	1 Gran
II	3	$1\frac{1}{2}$
III	2	2
IV	$1\frac{3}{5}$	3
V	0	50

Quarto denique, Auguſti 30. poſt merid. examinaui vtramque ſphaeram magneticam, minorem ſic ex balance ſuſpenſam, vt polus boreus ſurſum ſpectaret, et maiorem ita locatam, vt polus huius boreus etiam ſurſum ſpectaret, atque ſic poli amici ſe reſpicerent; quo facto ſequentem tabulam erui:

Obſeruatio Globor.	Diſtantiae	Attractiones
I - - -	$27\frac{1}{2}$ part. - - -	$\frac{1}{2}$ Gran.
II - - -	14 ——- - - -	1
III - -	$11\frac{1}{3}$ ——- - - -	$1\frac{1}{2}$
IV - -	$9\frac{1}{2}$ ——- - - -	2
V - -	8 ——- - - -	$2\frac{1}{2}$
VI - -	$7\frac{3}{5}$ ——- - - -	3
VII -	$6\frac{1}{2}$ ——- - - -	4
VIII -	5 ——- - - -	5
IX -	4 —— - - -	6
X -	0 ——- - - -	134

§. 7. Vt nunc ex his captis experimentis veritatem regulae muſſchenbroeckianae eruamus, via nobis antea praeſternenda eſt ſequentibus duobus problematibus geometricis; quorum primum, etiamſi ab *Archimede* iam ſolutum reperiatur, ſequenti modo explicatum dabo. Quaeritur ſoliditas ſegmenti ſphaerici FEGD. Sit hunc in finem ratio radii ad peripheriam $= 1 : p$, $EP = x$, $PM = y$, $CE = q$, $CB = e$, $ED = f$; erit $CP = q + x$, et peripheria radio PM deſcripta $= py$, area huius circuli $= \frac{py^2}{2}$, et elementum ſegmenti ſphaerici $= \frac{py^2dx}{2}$. Cum autem ſit $CP^2 + PM^2 = CM^2$, habebitur $q^2 + 2qx + x^2 + y^2 = e^2$, aut $y^2 = e^2 - q^2 - 2qx - x^2$, atque adeo $\frac{py^2dx}{2} = \frac{pe^2dx}{2} - \frac{pq^2dx}{2} - \frac{2pqxdx}{2} - \frac{px^2dx}{2}$, et conſequenter integrando habebitur $\int\frac{py^2dx}{2} = \frac{pe^2x}{2} - \frac{pq^2x}{2} - \frac{pqx^2}{2} - \frac{px^3}{6}$; abeat nunc x in $FD = f$, orietur ſoliditas ſegmenti ſphaerici $FEGD = \frac{pf}{2}(e^2 - q^2) - \frac{pqf^2}{2} - \frac{pf^3}{6}$; vel, quia $q = e - f$, habebitur eadem ſoliditas $= \frac{pf^2(3e-f)}{6}$.

§. 8.

§. 8. Sint nunc porro duae ſphaerae, maior FKEI et minor DHBO, diſtantia HI inter ſe remotae, quaeritur ſpatium cauum interceptum, quod formant hae duae ſphaerae, FIEBHD. Ponantur iterum ratio radii ad peripheriam $= 1 : p$, $KE = R$, $CB = r$, $HI = a$, ſinus totus $= 1$, anguli LEA ſinus $= s$ coſ. $= c$; eritque diſtantia centrorum $CK = R + r + a$. Ex figura ſatis patet, ſimilia eſſe triangula LKE, LEA, GCB et GBA; quare locum inuenient ſequentes analogiae; nempe: $1 : R = s : LE = sR$; $c : sR = s : LA = \frac{s^2R}{c}$; nec non; $1 : r = s : GB = sr$, et $c : sr = s : GA = \frac{s^2r}{c}$; cum praeterea ſit radii LE peripheria $= psR$, area huius circuli $= \frac{ps^2R^2}{2}$, orietur coni FEA ſoliditas $= \frac{ps^4R^3}{6c}$, et ſimili ratione coni DBA ſoliditas $= \frac{ps^4r^3}{6c}$; vnde habebitur conus truncatus $FEBD = \frac{ps^4}{6c}(R^3 - r^3)$. Reſtant iam indaganda adhuc duo ſegmenta ſphaerica FEI et DHB, quae auferenda adhuc erant ab inuento cono truncato, vt obtineatur tandem quaeſitum ſpatium cauum FIEBHD. Inuenietur itaque ex praemiſſo lemmate geometrico ſoliditas $FEI = p . \frac{LI^2(3R - LI)}{6}$, $= \frac{p \cdot \overline{1-c}^{\,2} \cdot R^3(2+c)}{6}$; $= \frac{pR^3(2 - 3c + c^3)}{6}$ et ſoliditas $DHB = \frac{p \cdot GH^2(3r - GH)}{6} = \frac{p \cdot \overline{1+c}^{\,2} \cdot r^3(2-c)}{6} = \frac{pr^3(2 + 3c - c^3)}{6}$. Eruetur hinc ſpatium cauum quaeſitum $= \frac{ps^4}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{pR^3(2 - 3c + c^3)}{6} - \frac{pr^3(2 + 3c - c^3)}{6} = \frac{ps^4}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{2pR^3}{6} - \frac{2pr^3}{6} + \frac{3c - c^3}{6} pR^3 - \frac{3c - c^3}{6} pr^3 = \frac{ps^4}{6c}(R^3 - r^3) + \frac{(3c^2 - c^4)p}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{2p}{6}(R^3 + r^3) = \frac{p(s^4 + 3c^2 - c^4)}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{2p}{6}(R^3 + r^3) = \frac{p(1 + cc)}{6c}(R^3 - r^3) - \frac{2p}{6}(R^3 + r^3)$, ſubſtituto valore ipſius $s^4 = 1 - 2c^2 + c^4$. Ducatur ex C recta CN, quae ſit

 paral-

parallela ipſi AE, erit apud N angulus rectus, et in triangulo KNC erit KC $(R+r+a)$: ſin. tot. $(1) = $ KN $(R-r)$: ſin. KCN (c), vt adeo valor ipſius c ſit $= \frac{R-r}{R+r+a}$.

§. 9. Eſt itaque ſoliditas ſpatii caui inter duos globos inaequales $= \frac{p \cdot \overline{1+cc} \cdot (R^3-r^3)}{6c} - \frac{p(R^3+r^3)}{3}$, ex qua formula difficilis eſt applicatio ad eum caſum, quo globi ponuntur aequales, quia poni debet in hoc caſu $c=0$ et $R=r$. Subſtituatur ergo in inuenta expreſſione valor ipſius c modo inuentus, obtinebitur ſoliditas caui

$$= \frac{p(2R^2+2r^2+2aR+2ar+a^2)}{6(R+r+a)(R-r)}(R^3-r^3) - \frac{p(R^3+r^3)}{3};$$

facta nunc diuiſione actuali per $R-r$, oritur idem cauum

$$= \frac{p(2R^2+2r^2+2aR+2ar+a^2)(R^2+Rr+r^2)}{6(R+r+a} - \frac{p(R^3+r^3)}{3}.$$

et multiplicatione actu inſtituta, facta reductione ad eandem denominationem, et abiectis quantitatibus, quae ſe deſtruunt, fit tandem, vltima aequatione prodeunte in factores rurſus ſoluta, $\frac{6 \times \textit{ſolidit. caui}}{p} = \frac{r^2(4R^2+a^2)+aR(a+4r)(R+r)}{R+r+a}$, quam expreſſionem indigitabo vnica litera, et ponam $=M$.

§. 10. Si deinde accidat, vt ſit $R=r$, in caſu ſphaerarum aequalium, obtinebitnr facile $\frac{6 \times \textit{ſolid. caui}}{p} = \frac{(4r^2+9ar+3a^2)r^2}{2r+2}$, et diuiſione actu inſtituta $\frac{6 \times \textit{ſolid. caui}}{p} = (2r+3a)r^2$. Eſt vero hic pro omnibus diſtantiis ſoliditas caui vti $2r+3a$, ob r^2 vbique idem, quare in hoc caſu erit $2r+3a=M$, et aſſumta conſtante α, experimento vnico definienda, erit attractio magnetica

$=$

$= \frac{\alpha}{M^4}$, vbi loco ipſius M numeri caſuum alterutri reſpondentes debebunt adhiberi.

§. 11. Subducto nunc calculo numerico, ſatis moleſto quidem, inueni ſequentia, quae hac tabula continentur:

	Experim.		dift.	M.	attr. obſerv.	attr. theoriae
I	caſus	1	$8\frac{3}{5}$	$39\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		2	$6\frac{3}{10}$	$32\frac{9}{10}$	1	$1\frac{7}{100}$
		3	$4\frac{4}{5}$	$28\frac{2}{5}$	2	$1\frac{93}{100}$
		4	$3\frac{4}{5}$	$25\frac{2}{5}$	3	$3\frac{1}{100}$
		5	$3\frac{1}{5}$	$23\frac{3}{5}$	4	$4\frac{4}{100}$
		6	$2\frac{4}{5}$	$22\frac{2}{5}$	5	$4\frac{98}{100}$
		7	0	14	1977	$32\frac{65}{100}$
II	caſus	1	$14\frac{1}{2}$	2594	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
		2	9	1843	1	2,94
		3	4	1159	2	18,82
		4	2	886	3	55,10
		5	0	613	67	240,40
III.	caſus	1	4	1159	1	1
		2	3	1023	$1\frac{1}{2}$	1,65
		3	2	886	2	2,93
		4	$1\frac{3}{5}$	832	3	3,76
		5	0	614	50	12,69
IV.	caſus	1	$27\frac{1}{2}$	4372	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		2	14	2526	1	4,49
		3	$11\frac{1}{2}$	2184	$1\frac{1}{2}$	8,03
		4	$9\frac{1}{2}$	1911	2	13,69
		5	8	1706	$2\frac{1}{2}$	21,56

6	$7\frac{1}{5}$	1651	3	24,59
7	$6\frac{1}{2}$	1501	4	35,98
8	5	1296	5	64,75
9	4	1159	6	101,20
10	0	613	134	1293,00

Nempe pro experimento quocunque expofitorum, ex datis radiis fphaerarum et earum qualibet diftantia fubduxi ex paragrapho 9 et 10 valorem ipfius M, et cum attractio debeat effe $= \frac{\alpha}{M^4}$, erit logarithmus attractionis $= l\,\alpha - 4\,l\,M$, vbi $l\,\alpha$ in quolibet experimento ex primo eius cafu determinatur.

§. 13. Apparet nunc facile ex comparatione tabulae huius vltimae, experimentum primum ita confpirare cum theoria muffchenbroekiana, vt melius non poffit; de quo etiam cafu fphaerarum nempe aequalium folo theorema hoc pronunciauit Vir fagaciffimus. Dubitari itaque non poteft, obtinere allegatam muffchenbroekianam proportionem attractionum magneticarum in cafu fphaerarum aequalium, quamuis, vt verum fatear, a priori eam deriuare ex vlla attractionum hypothefi generali nequeam. Deinde id etiam incommodi fecum fert haec theoria, quod attractiones mutui contactus fphaerarum exhibeat nimis paruas. Nam faepius laudata haec theoria in experimento primo iubet attractionem effe in immediato vtriusque fphaerae contactu fere 33 granorum, cum tamen 1977 Gran. obferuata fuerit. Apparet vero porro etiam in cafu fphaerarum inaequalium, fiue vtraque fphaera magnetica fit, fiue non, praefatam theoriam plane non ita comparatam effe, vt pro verofimili tantum haberi poffit, vbi dolendum certe eft, peruicaciam

quafi

quasi huius lapidis tantam esse, quae nullis legibus generalibus se adstringi hucusque patiatur. Id tamen merito honoris cel. *Musschenbroekio* exinde accrescit, quod in re tam difficili, atque in obscuritate hac naturae hucusque indomita futuris seculis facem, quam sequi tuto licet, ingenii sui acrimonia et laborum constantia accenderit.

§. 13. Reuocabo nunc ad examen aliud experimentum, quod ipse cel. *Musschenbroekius* instituit cum duobus globis magneticis inaequalibus, quorum vnius diameter erat $6\frac{1}{2}$ poll. londinens. siue 78 lin. alterius 18 lin. et quod legitur in dissertatione de magnete cap. 1. p. 16. Absoluto casuum quorundam huius experimenti calculo, sequens mihi enata est tabella.

distantia	M	attract. observ.	attr. theoriae
70 lin.	125253	$1\frac{1}{4}$ Gran.	$1\frac{1}{4}$
45	80433	3 —	7
28	51459	9 —	44
12	26379	23 —	634

Vnde rursus patet, laudatissimam theoriam ad casum globorum inaequalium non extendi.

DESCRIP-

DESCRIPTIO
CASSIAE AMERICANAE PROCVMBENTIS, HERBACEAE, MIMOSAE FOLIIS, FLORIBVS PARVIS, SILIQVIS ANGVSTIS, PLANIS.

A. I. A.

Caſſias cum clariſſ. Tournefortio voco omnes plantas, quae floribus praeditae ſunt pentapetalis, quorum piſtillum abit in ſiliquam nunc teretem et cylindraceam, nunc compreſſam, in varia loculamenta diuiſam a diſſepimentis transuerſa poſitis, medulla quadam ſubinde obductis, foetam ſeminibus duris. His notis addi poteſt, quod petala florum fere ſemper diuerſae ſint magnitudinis et formae, quod ſtamina habeant vtplurimum decem variae longitudinis et formae, variis etiam apicibus onuſta.

Vix datur aliud plantarum genus, cuius ſpecies ſtatura, proceritate, creſcendi modo et fructu adeo inter ſe diuerſae ſunt; dantur enim arboreſcentes, dantur fruteſcentes vel erectae vel procumbentes perennes; dantur herbaceae annuaeque ſpecies; dantur Caſſiae fructu tereti cylindraceo pulpa quadam nigricante repletae; dantur fructu tereti et angulato duplici ſeminum ordine foeto; dantur etiam ſiliquis planis compreſſis; dantur denique ſiliquis articuloſis, qualem ante aliquot annos circa Campechy nouae Hiſpaniae vrbem detexit G. Houſtonus. Taceo folia, in quibus non minor differentia deprehenditur.

Ne vnica quidem pulchritudine et vſu medico inſignis huius generis ſpecies in Europa ſponte prouenit, ſed

ſed omnes fere americanae et aſiaticae ſunt originis, exceptis paucis Africae indigenis. Harum plurimae mihi ſunt aut penitus hactenus incognitae, aut non bene ab auctoribus deſcriptae. Hoc autem loco animus tantum eſt exhibere deſcriptionem vnicae ſed rarae admodum ſpeciei, quae maioris et clarioris diſtinctionis cauſſa ab aliis huius generis ſpeciebus a me ſic appellatur:

CASSIA americana procumbens, herbacea, Mimoſae foliis, floribus paruis, ſiliquis anguſtis, planis.

E radice albenti, valde fibroſa, cauliculus ſurgit admodum gracilis, teres, pedalis aut ſequipedalis, inſerne purpuraſcens et parum hirſutus, ſuperne verſus extremitatem pallide viridis et glaber, mox ſupra radicem duos emittens ramos coniugatos, in terram reclinatos. Breui poſt hoſce ramos interuallo caulis in tres quatuor pluresue alios, aequalis fere longitudinis prioribusque per omnia ſimilis alterno ſemper ordine diuaricatur, ita, vt vix dignoſci poſſit, quinam proprie horum ramorum caulis ſit continuatio. Rami omnes teretes ſunt, hinc inde parum intorti, terram verſus inflexi vel humi plane procumbentes.

His ad vncialia praeter propter interualla alterno ordine folia adnaſcuntur ſescunciam, vncias duas aut tres ſubinde longa, pollicem ſiue ſesquipollicem in medio lata, vtrinque anguſta et obtuſa, ex octo, nouem, decem, vndecim, duodecim aut tredecim, raro pluribus pinnarum coniugationibus compoſita, nulla cum impari coſtam claudente. Coſtae, quibus pinnae hae adhaerent, prope

 baſin

bina geniculatae ſunt, tenuiſſimae, hirſutae, ab altera parte gibbae, ab altera canaliculatae ſeu carinatae, ad exortum duabus auriculis paruis, anguſtis et valde acutis, ramisque appreſſis praeditae. Pinnae vero breuiſſimis et vix conſpicuis pedunculis geniculatis inſident, ſuntque pollicis trientem aut dimidium circiter vnciam latae, glabrae, ſi oculis nudis ſpectantur, parum ad oras praecipue hirſutae, ſi microſcopio armatis cernuntur, in tenuiſſimam ſpinulam inermem et mollem terminatae, ſuperne laete virides, inferne dilutiori colore ad glaucum vergente tinctae. Harum neruus non medium telae percurrit, ſed ad oras propius admouetur. Noctu folia clauſa ſunt, interdiu vero expanſa Mimoſarum aliarumque plantarum ad inſtar.

Flores non ex alis foliorum ſed ex lateribus ramorum ad duarum aut trium linearum ab illis diſtantiam, mox ſupra memoratarum auricularum mucrones, per totam fere ramorum longitudinem, in pediculis breuibus, lineam vnam aut alteram longis oriuntur, modo ſingulares, modo bini aut terni, exiles valde, vix duas aut tres lineas lati, pentapetali, roſacei, flaui, calyculis contenti e viridi flaueſcentibus, in quinque vt plurimum ſegmenta acutiſſima et inaequalia fiſſis. Petala diuerſae quoque ſunt magnitudinis, quorum quatuor fere aequalia, oblonga et obtuſa, interdui etiam vt plurimum clauſa, quintum et infimum, contra ac in plerisque Caſſiae ſpeciebus fieri ſolet, quatuor ſuperioribus triplo maius eſt, ſubrotundum, concauum.

E fundo calyculi piſtillum ſurgit oblongum, planum, dorſo et ventre viride et glabrum, ad latera piloſum et inca-

incanum, decem ſtaminibus paruis, magnitudinis et formae diuerſae, vt in congeneribus, circumdatum, quod progreſſu temporis in ſiliquam excreſcit planam, compreſſam, vnciam plus minus longam, duas circiter lineas latam, initio viridem, per maturitatem fuſcam, glabram vel parum admodum hirſutam, ex duabus membranis compoſitam, ſeminibusque foetam quinque aut ſex, compreſſis, lacunibus, nigricantibus et ſplendentibus, angulatis, tenuibus diſſepimentis inter ſe diſtinctis, nulla omnino pulpa obtectis.

Elegans haec planta in horto Academico ſuccreuit ex ſeminibus cum integris ſiliquis circa Philadelphiam vrbem in Penſyluania, Americae ſeptentrionalis prouincia, ſitam collectis, floruitque Iulio, Auguſto et Septembri menſibus. Quamuis primo ſemper a ſatu anno flores magna copia producat, fructus tamen raro maturat; cum floribus enim marcentibus eorum rudimenta vt plurimum ſimul delabuntur. Et ſi illorum aliquot augmentum capivnt, ob nimis breuem huius regionis aeſtatem ad plenam maturitatem non perueniunt. Ceterum notandum adhuc eſt, plantam, quam deſcripſi, in fictili enutritam fuiſſe. Illae quidem, quas ſolo fimi equini calore tepente plantaui, laetius creuerunt, folia et ramos plures atque maiores humi procumbentes obtinuerunt, flores autem nunquam multo minus fructus protulerunt. Hyeme vero omnes radicitus perierunt.

Eſt porro ſine dubio eadem planta, quae Chamaecriſta Mariana, flore minore Petiv. hort. ſicc. apud Rai. Hiſt. Plant. Tom. III. App. cuius ſpecimen ipſum, ex quo denominatio haec originem traxit, in muſaeo ſloaniano vidi. Icon ſennae ſpuriae virginianae, Mimoſae foliis, flo-

 ribus

ribus paruis, nictitantibus, Pluk. Alm. Bot. Tab. 314. fig. 5. Si florum paruitatem et siliquarum formam spectes, satis ad plantam nostram accedere videtur. Flores autem et siliquae in planta Plukenetiana ex alis foliorum egrediuntur, secus ac in nostra; flores quoque omnes singulares pinguntur, cum in nostra duo aut tres vt plurimum ab vno exortu enascantur; auriculae etiam basin costarum ambientes simplices repraesentantur, in nostra vero duplices sunt; foliorum pinnae longiores et latiores quoque sunt, vtrinque obtusae et aequalis fere vbique latitudinis. Differt praeterea nostra haec planta a Chamaecrista Pauonia americana, siliqua multiplici Breyn. Cent. I. p. 66. Cap. XXIV, potissimum crescendi et ramos emittendi modo; statura maiori et erecta; pinnis foliorum paucioribus, iisque praecipue, quae in medio eorundem positae sunt, longioribus et latioribus, in spinulam abeuntibus; florum denique staminibus breuioribus.

DE

DE PHAENOMENIS PLVMBI FVSI IN TVBIS CAPILLARIBVS.

C. E. Gellert.

In doctrina de tubis capillaribus experimenta hactenus sunt instituta circa corpora, quae perpetuam fluidatem prae se ferunt: quibus debito modo institutis pro comperto affirmari potest, altitudines mercurii, infra libellam depressi, et omnium liquorum, supra eandem ascendentium, esse in ratione reciproca diametrorum. Perpendens itaque metalla in vasis puris fusa ad modum referre argentum viuum et istud ideo a Chemistis dici metallum igne minimo fusum, suspicabar phaenomena metalli fusi in tubis capillaribus similia eis, quae in argento viuo reperiuntur, esse futura. Apud animum igitur statuebam periculum facere, quo intelligerem, an experientia coniecturis meis sit responsura. Nec spes me fefellit. Nam experimentis in plumbo captis obseruaui haec quatuor phaenomena generaliora:

1) plumbum fusum in tubo capillari semper subsistere ad altitudinem aliquam infra libellam metalli in vase contenti.

2) altitudinem istam esse propemodum in ratione reciproca diametrorum, propemodum dico, nam neque inaequalitatibus, licet sint perexiguae, vllus tubus carere, neque eam ob causam diametrorum mensura, prout decet, institui potest:

3) in tubis, qui non vbiuis aeque sunt lati, pro diametro eius superficiei, ad quam summitas plumbi in tubo pertingit, istud subsistere;

4) idem euenire in tubis figulinis.

Praecipua autem experimenta sunt ista.

Tab. VI. *Exp. I. fig. 4.*

Immersi tubum capillarem vitreum AB in plumbum fusum et ebulliens vsque ad D, intrauit quidem plumbum, sed subsistebat ad altitudinem aliquam infra libellam, nempe in C; quo gracilioribus vsus sum tubulis, eo maior erat ista altitudo DC.

Exp. II. fig. 5.

A B et *a b* significant tubos vitreos aequalium diametrorum, quibus plumbo liquefacto immersis altitudines DC et *d c* sibimet inuicem sunt aequales. Idem quoque euenit, si alterutri tubus figulinus, dummodo sit eiusdem diametri, substituatur; quod commode fistulis, vsui herbae nicotianae inseruientibus peragi potest, vtpote quae satis accurata in hunc vsum gaudent diametro.

Exp. III. fig. 6.

Diameter tubi AB sese habebat ad diametrum tubi *ab* vti 3 : 1 ista enim erat $\frac{21}{10}$ lin. haec autem $\frac{7}{10}$ lin. His immersis in plumbum fusum altitudo *d c* $\frac{7}{10}$ lin. ad quam istud infra libellam subsistebat, erat propemodum ad altitudinem alterius tubi D C $\frac{27}{10}$ lin. vti 3 : 1, seu altitudines erant in ratione reciproca diametrorum. In tubis, quorum diametri erant in ratione quacunque, eundem semper oriri euentum saepius iterato experimento didici.

In dimetiendis istis altitudinibus et diametris mensura vsus sum anglicana, in qua pes in duodecim pollices, et pollex in decem lineas diuiditur.

Exper. IV.

Sumatur tubus inflexus, quem repraesentat fig. 7.

hunc

hunc immergas in plumbum fusum, hoc subsistet in C infra libellam, et erit altitudo perpendicularis DC aequalis altitudini, quae obseruatur in tubo recto eiusdem diametri.

Exp. 5. fig. 8.

Testam fieri curaui figulinam ABCD, cauitas *a b c* prisma repraesentat, latitudo huius cauitatis in *a c* est vnius pollicis et semper decrescens versus *b*, ibi denique fit $\frac{3}{10}$ lin. Posita testa in situ horizontali et infuso plumbo altitudo huius versus *b* semper decrescebat. Fateor hoc experimentum bis non ex voto successisse. Nam distincte quidem videre erat, metallum fusum sese attollere ad maiorem minoremue altitudinem, pro maiore aut minore intercapedine; sed cum testa ob intensum huius hiemis frigus non bene esset exsiccata, infundendo plumbum inaequales huius oriebantur motus, vt nulla decrementi lex obseruari posset. Interim hoc experimentum, vtut mancum, reticere nolui, quia in metallis, ad quae fundenda maior, quam ferre vitrum possit, requiritur gradus caloris, egregie cautelis necessariis adhiberi potest.

Exp. VI fig. 9.

Sit tubus AB, altitudo plumbi infra libellam subsistentis diametro tubi respondens GH. Immergas illum in plumbum fusum et altitudo immersionis sit aequalis GH, aut illa minor, nihil metalli in tubum intrabit.

Exper. VII. fig. 10.

Si tubum ABC, constantem duabus partibus, ampliore et angustiore, immittas in plumbum fusum, et altitudo immersionis superet altitudinem, quae debetur diametro tubi

gra-

gracilioris, hoc pro ratione diametri amplioris subsistet in tubo, etsi diameter nimis sit magna, ad libellam perveniet.

Exp. VIII. fig. 11.

Sit ABC tubus, parte ampliore et strictiore instructus; EF denotet altitudinem plumbi depressi, quae respondet tubo graciliori, et GH, altitudinem tubi amplioris. Mergatur vt in experimento antecedenti, sed ita, vt pars tubi amplioris submersa aut altitudini EF aequalis, aut illa minor sit, nihil metalli in tubo ampliore reperies Inuertatur deinceps tubus et denuo mergatur, sed ita, vt pars submersa tubi gracilioris non superet GH, deprehendes, plumbum nec in graciliorem intrasse.

Exp. IX. fig. 1.

Tab. VII. Sit tubus conicus ABC, immittas illum plumbo liquefacto eo situ, quem figura exhibet, istud infra libellam subsistet ad altitudinem DC; quo profundius deinceps detruditur, eo maior fit altitudo DC.

Exp. X fig. 2.

Inuertatur eiusmodi tubus et immergatur eius pars exilior, habebis DC pro altitudine plumbi infra libellam subsistentis; quo profundius illum immergis, eo magis decrescit altitudo DC.

Exp. XI. fig. 3.

Inflectatur tubus diametri inaequalis in formam ABC, immittatur plumbo fuso, istud subsistet in C. Sit C diam. superficiei supremae plumbi in tubo, erit altitudo perpendicularis DC ea, quae debetur tubo recto diametri C.

Ex-

Exponendum hoc in loco cenſeo, quomodo haec experimenta in tubis capillaribus inſtituerim, quo melius diiudicari poſſit, vtrum momentum aliquod habeant nec ne? et quo facilior aliis, quibus volupe fuerit, ea reiterare ſeu alia tentare pateat via.

Mihi manus operi admouenti duae potiſſimum ſuboriebantur difficultates remouendae. Nam 1) tubi quidam vitrei vim caloris plumbi fuſi ferre non poterant, et 2) altitudo ad quam plumbum infra libellam ſubſiſtebat, non conſpici et eam ob cauſſam menſuratione definiri nequibat. Quod ad priorem attinet, ſaepius iterato experimento animaduerti, rumpi tantum craſſiores, tenuiores autem nihil detrimenti pati. Caleſeci itaque craſſiores paullatim, antequam in plumbum fuſum immergebam, quo facto non conatus meos infringebant. Ad alteram tollendam prima vice hac vſus ſum methodo. Filo aeneo circumuoluto annotaui in tubo altitudinem, ad quam illum in plumbum immerſurus eram, licet et iſtud in parietibus tubi externis adhaerens altitudinem immerſionis oſtenderet. Immerſo tubo orificium eius digito aut cera obturaui, aut hermetice clauſi; tum vero admodum leniter extraxi, ne motus in cauſa eſſet, quo excideret plumbum, et, cum metallum ad altitudinem aliquam ſuſpenſum haereret, menſuraui differentiam inter hanc et altitudinem immerſionis nempe CD. His peractis in plurimis experimentis reperi phaenomena paullo ante memorata. Nullus itaque de ipſorum veritate dubitabam, praeſertim cum et diametros tubulorum ſumma, qua potui, induſtria dimenſus eſſem. Verum enim vero bis obſeruans, plumbum in tubo leniter et verticaliter extracto duobus ſaltibus pollicis longi-

 iuditudinem ſuperantibus ſuperiora petere, minuti ſecundi temporis ſpatio propemodum ibi morari, et deinceps rurſus ad imum deſidere; non potui a me impetrare, vt mihi perſuaderem, hanc methodum omnibus numeris abſolutam eſſe. Ideo hoc ſingulare phaenomenon ad aliam et quidem tutiorem viam quaerendam me impellebat, quam mox indicabo,

Exp, XII. fig. 4,

Immerſo tubo ampliori, ſed tamen reſpectu metalli capillari, e. g. diam. 2. lin. in plumbum fuſum, animadvertebam metallum iſtud infra libellam in tubo ſubſiſtens, conſpici poſſe in forma ſphaerica; ſuperficiem iſtius ſupremam in tubo prius figi, quam in vaſe; et, cum tunc tubo firmiter adhaereat, locum ſuum, illo extracto non mutare.

His fretus facile et exacte altitudinem iſtam DC in tali tubo et huius ope in gracilioribus determinare potui hunc in modum. Vna cum tubo ampliore immerſi duos treſue graciliores vtrinque apertos, ſimulac in ampliore tubo plumbum conſiſtebat, omnes leniter extraxi, quo facto plumbum in omnibus ſuſpenſum haerebat; menſuraui deinceps differentiam inter altitudinem plumbi in tubo ſuſpenſi et altitudinem immerſionis, et deprehendi eadem prorſus phaenomena, quae cognoueram methodo priore. Veritatem itaque dictorum phaenomenorum non amplius in dubium reuocaui, ſed cum nihil egiſſe viderer, niſi et cauſſam illorum qualemcunque allegaſſem, quae de ea pro viribus meditatus ſum in medium proferre et aliorum maturiori iudicio relinquere volui. Prius autem quam me ad iſtam exponendam accingam, propoſitiones quaedam, qui quibus innititur, erunt ponendae et veritas ſingulorum experientia comprobanda.

Propoſitio I.

Particulae plumbi liquefacti ſeſe mutuo attrahunt.

Simulac plumbum funditur, in globum ſe colligit, et immerſo in iſtud tubulo capillari ampliori, vt intra illum etiam conſpici poſſit, forma ſphaerica apparet, quae et eo concreto remanet. Cum autem experimenta in vacuo inſtituta oſtendant, figuram ſphaericam aquae et mercurii, attractioni particularum, non preſſioni aeris eſſe tribuendam (a); inde colligere licet, formam ſphaericam plumbi fuſi nulla alia ex cauſa niſi attractione particularum proficiſci. Idem probant duae guttae plumbi ad contactum mutuum in vnum coeuntes.

Propoſitio II.

Particulae plumbi fuſi et ebullientis cohaerent vitro aut argilla.

Si detrudas vitrum candefactum ſeu inſtrumentum quoddam figulinum in plumbum fuſum, et id poſtea extrahas; apparebit particulas metalli perexiguas ipſi adhaerere.

Propoſitio III.

Particulae plumbi liquefacti ſeſe inuicem fortius attrahunt, quam cum vitro aut argilla cohaerent.

Propoſitiones duae priores oſtendunt, particulas plumbi fuſi ſeſe mutuo attrahere et cum vitro aut argilla cohaerere

(a) Tent. Exper. Academ. del. Cimento Exp. 2. in vac. inſtit. et les Memoires de l'Academie Royal. de Sciences a. 1724. p. 149.

rere. Immerſo tubo capillari in plumbum fuſum, cylindrus plumbi iſtius in vaſe aequalis DC innititur impellere plumbum intra tubum ad libellam vsque, quem etiam adiuuat cohaeſio cum vitro; hoc ſi fieret, particulas intra tubum aſcenſuras a metallo in vaſe contento, quod a lateribus contingunt, recedere oporteret, quod autem, quo minus fiat, impedire conatur attractio mutua particularum plumbi. Cum itaque plumbum in tubo capillari ad altitudinem aliquam DC infra libellam ſubſiſtat, attractio mutua particularum plumbi aequalis eſt ponderi metalli DC et cohaeſioni cum vitro, ergo iſta multo maior. Addi inſuper poteſt ſuperficies ſupremas omnium liquorum in tubis capillaribus ſupra libellam aſcendentium eſſe concauas, plumbi autem et argenti viui, vtpote quae infra libellam ſubſiſtunt, conuexas.

Haec cum ita ſint, meo quidem iudicio cauſſa praecipua plumbi in tubo capillari infra libellam ſubſiſtentis ſita eſt in attractione mutua particularum plumbi.

Experimentis certiores facti ſumus, altitudines plumbi eſſe in ratione reciproca diametrorum. Nunc autem oſtendere conabor, quamobrem hoc ita fieri debeat.

Attractio mutua particularum plumbi et cohaeſio ipſius cum vitro pro vnoquoque tubo capillari eſt determinanda ex tubi peripheria, ſeu, quod idem eſt, ex ipſius diametro. Quo maior enim eſt peripheria, eo plures particulae a reliqua plumbi maſſa recedere neceſſe habent, et eo maior fit cohaeſio plumbi cum vitro.

Sit itaque fig. 3. tubus ADCB eius diameter $=$ B, altitudo capillaris $=$ C, attractio mutua plumbi pro hoc tubo $=$ P $=$ B, et cohaeſio cum vitro $=$ E $=$ B; attractio

tractio mutua plumbi pro tubo $adcb$, cuius diameter $= b$, et altitudo capillaris $= c$, ſit $= p = b$ et cohaeſio cum vitro $= e = b$. Iam vero ſcimus ex modo dictis eſſe $P = B^2 C + E$, et $p = b^2 c + e$, erit igitur $P : B^2 C + E = p : b^2 c + e$, multiplicando extrema et media $P b^2 c + P e = p B^2 C + p E$ et cum ſit $P e = p E$, diuidendo et multiplicando per Pe et pE erit $P b^2 c = p B^2 C$, diuidendo porro per $P = B$ et $p = b$, reſtat $bc = BC$. Quod ſi denique diuidas per b, et B, eſt $c : B = C : b$.

Experimenta 7. 8. 9. 10. 11. oſtenderunt in tubis, qui non vbiuis aeque ſunt lati, altitudinem DC deberi aeſtimari pro diametro iſtius ſuperficiei, ad quam plumbum in tubo pertingit, quod phaenomenon ſequentem in modum explico. Eſt lex hydroſtatica, fluida quaecunque premere pro altitudine et baſi. Sit itaque ABCDEG, tubus non capillaris communicans, quem fig. 16. exhibet, et in E fundus mobilis F, ita adaptatus, vt fluido circa latera eiusdem nulla pateat via, huius baſis ſit $= b^2$, denſitas fluidi autem $= d$; repleatur tubus fluido vsque ad A erit preſſio in fundum $F = AB b^2 d$. In applicatione ad noſtrum caſum nobis tantum concipiamus, fundum mobilem eſſe ſummam ſuperficiem plumbi intra tubum, reliqua ſua ſponte fluent.

DE TVBIS CAPILLARIBVS PRISMATICIS.

C. E. Gellert.

Philoſophi ideo potiſſimum doctrinam de tubis capillaribus excoluerunt, quo operationes naturae a capillaritate pendentes eo melius perſpicerent, vſi hucusque tantum tubis cylindricis in experimentis ab ipſis inſtitutis. Cum vero a fertili natura non ſolum formentur cauitates capillares cylindricae; ſed potius multiformes a diligentibus naturae ſcrutatoribus in animalibus, vegetabilibus et mineralibus reperiantur; operae pretium iudicaui experimenta in tubis capillaribus priſmaticis capere, phaenomena ibi obuenientia ſollicite annotare, cum iis, quae in tubis cylindricis iam obſeruata ſunt, comparare et eo animum appellere, vt generalior doctrina detubis capillaribus euadat.

Tubi capillares priſmatici artificiales, quantum memini, ad haec vsque tempora fuere incogniti. Arduum inſuper prima fronte videtur, illos conſtruere, cum tamen reuera facili negotio parantur. Praeponam itaque experimentis methodum illos conficiendi, quae haec eſt.

Paretur priſma ferreum triangulare ſeu quadrangulare, longitudinis 6 ſeu 8. dig. et craſſitiei circiter $\frac{1}{2}$ dig. hoc obducatur in officina vitraria vitro candente ductili, perpetuo circumuertendo, vitrum forcipe priſmati bene apprimatur, ita, vt perfecte eius formam acquirat; priſmate extracto, vitrum rurſus bene candefacias, et exinde re-

cta

ćta ſemper circumrotando extrahas, habebis tubos capillares extrinſecus quidem cylindricos intus autem prismaticos, graciliores ſi celeriter tubum extraxeris, latiores ſi tardius.

Tubis hoc modo paratis non dubitabam, quin aqua in iisdem ſit aſcenſura; qua autem ratione id fieret, adhuc ſub iudice, experientia nempe, lis erat. Ad iſtam igitur obtinendam, ſumſi hos tubos priſmaticos recenter conflatos, diuerſae ſed adhuc incognitae capacitatis, longitudine tantum diſtinćtos, et ſollicite obſeruaui ad quam altitudinem in vnoquoque aqua pura aſcendebat, vſus menſura anglicana, cuius pes in duodecim digitos, digitus in decem lineas, et linea in decem partes minutas, integer itaque pes in mille et ducentas partes diuiditur. Breuitatis ergo experimenta hac tabula exhibere lubet, in qua altitudines aquae ſupra libellam eleuatae ex vtraque tubi parte annotaui, cum omnes tubi priſmatici ſunt pyramidales, ea ex cauſa, quae omnes cylindricos reddit conicos.

Tubi capillares prismatici quadrangulares.

No.	Longitudo	Adscensus aquae.	
		in parte ang.	in parte lat.
	Partes pedis in 1200		diuisi.
I.	1210	154	133
II.	1500	80	75
III.	1550	179	166
IV.	1590	80	76
V.	1597	167	142
VI.	1535	160	150
VII.	1690	192	185
VIII.	1620	190	186

Tubi capillares prismatici triangulares.

No.	Longitudo	Adscensus aquae.	
		in parte ang.	in parte lat.
	Partes pedis in 1200.		diuisi
I.	1320	110	95
II.	1610	180	168
III.	1745	207	200
IV.	1790	177	171
V.	1810	190	190

Has

Has altitudines saepius reiteratis experimentis reperi constantes, praeter quod in tubis amplioribus aqua in angulis altius et pyramidis instar ascendebat, cuius mensura vero nequaquam capi potuit, apice ita extenuato, vt tandem omnem aciem oculorum effugeret.

Nactus altitudines, ad quas aqua eleuabatur, sollicitus fui de mensura basium instituenda; quam cum minus accurate absolute determinare possem, sequens mensurandi genus relatiuum adhibui.

Tubum A B, fig. 6. ampliorem prismaticum alligaui perpendiculariter machinae ligneae F G H I, ita vt firmus ac immobilis staret, eius orificium inferius clausi cera, in superius inserui infundibulum vitreum in tubum valde gracilem desinens; deinde impleui alium graciliorem *ab*, fig. 7. sugendo mercurio, ab omnibus sordibus apprime purgato, ad certam altitudinem *a c*, filo aeneo annotatam; eandem mercurii massam ex hoc tubo immisi in tubum maiorem A B per infundibulum K, et mensuraui altitudinem A C. Iam vero haec prismata *a c*, et A C sunt aequalia, et aequalia prismata reciprocant bases et altitudines, legitime itaque inferebam: vti altitudo *a c* ad altitudinem A C, ita basis A^2 ad basin a^2. Notandum est mercurium lente in infundibulum esse infundendum, impetu enim si irruit, globuli quidam resiliunt. Contingit quoque, vt interdum mercurius tubum ingredi ab aere in tubo contento prohibeatur, et in infundibulo retineatur; tunc caute cera ab orificio inferiori est paullulum remouenda, vt liber aeri pateat exitus, simulac vero omnis mercurius in tubum descendit, hic dextre et celeriter cerae est apprimendus, ne qua pars mercurii euadat. Tab. VII. fig. 6.

In iisdem tubis, quorum altitudines capillares paullo ante annotaui, altitudines aequalium massarum mercurii in binis tubis erant sequentes.

	No.	altitudo		No.	altitudo	altit. ex part. alt.
Mercurius, qui erat in tubo prismatico quadrangulari.	I.	1050	erat in tubo prismatico quadrangulari.	II.	319	332
	III.	1050		II.	142	150
	IV.	165		II.	164	173
	V.	1050		II.	218	227
	VI.	1050		II.	220	230
	VII.	896		II	130	138
	VII.	1050		II.	160	170
	VII	1250		II.	193	205
	VIII.	1050		II.	165	174
	No.	altitudo		No.	altitudo	altit. ex alt. part.
Mercurius qui erat in tubo prismatico triangulari.	I.	216	erat in tubo prismatico quadrangulari-	II.	160	170
	II.	1300		II.	255	267
	II.	1090		II.	202	215
	III.	1090		II.	176	186
	III.	1300		II.	205	215
	IV.	1300		II.	270	280
	IV.	1090		II.	229	239
	V.	1050		II.	181	192

Bases

Bases igitur horum tuborum erant inuerse vti altitudines in ista tabula designatae, e. g. Basis tubi quadrang. prism. No. II. ex parte arctiore sese habet ad basin tubi prism. quadr. No. I. vti 1050 ad 332, ex parte ampliore autem vti 1050 ad 319.

Ex tabula prima et secunda videre est, aquam in tubis prismaticis gracilioribus aeque ac in cylindricis altius ascendere quam in amplioribus, et capacitatem exinde in tubis vbiuis aeque latis esse caussam diuersarum altitudinum aquae supra libellam eleuatae. Hanc ob rem in rationem quandam inter bases tuborum meorum prismaticorum et altitudines aquae eleuatae inquisiui, aggressisque quibusdam viis, in rectam reductus certior factus sum, istas altitudines capillares esse propemodum interse inuerse vti radices basium: quod, vt eo melius patefiat, quosdam tubos ad calculum reuocabo. Radix baseos tubi prismatici quadrangularis No. I. sese habet ad radicem baseos tubi prismatici quadrangularis No. II. quam proxime vti 36 : 65. Adscensus aquae in tubo No. II. ex parte arctiore fuit $\frac{80}{10}$ lin. quaesito quarto proportionali ad hos tres numeros prodit altitudo capillaris pro No. I. $\frac{144}{10}$ lin. aequidifferens a $\frac{164}{10}$ et $\frac{133}{10}$ lin. altitudinibus experimento in tabula prima obseruatis, quod mirum non est, cum hic tubus admodum conicus altus $\frac{1219}{10}$ lin. mercurio repletus fuit ad $\frac{1050}{10}$ lin. Radix baseos tubi prismatici quadr. No. III. sese habet ad radicem baseos tubi No. II. ex parte ampliore ferme vti 28 : 65. Aqua in tubo No. II. ex parte ampliore est eleuata ad $\frac{75}{10}$ lin. finita operatione quartus proportionalis est $\frac{174}{10}$ lin. pro altitudine adscensus aquae in No. III. quam experimentum mihi exhibuit $\frac{179}{10}$ et $\frac{166}{10}$ lin.

Radix baseos tubi prismatici quadr. No. VIII. est ad radicem baseos tubi prism. quadr. No II. ex parte ampliori vti 26 : 65. Altitudo aquae supra libellam eleuatae in tubo No. II. ex parte ampliore $\frac{75}{10}$ lin. Quartus proportionalis $187\frac{1}{2}$ lin. dat altitudinem capillarem pro No. VIII, ab ista in tabula $\frac{190}{10}$ et $\frac{186}{10}$ lin. non admodum differentem. Radix baseos tubi prismatici triangularis N. V. est ad radicem baseos tubi prism. quadrangularis No. II. quam proxime vti 13 : 33. Aqua in tubo No. II. eleuata ad $\frac{80}{10}$ lin. vna cum istis radicibus dat $\frac{203}{10}$ lin. pro altitudine capillari in tubo triangulari No. V. quae experimento obseruata fuit $\frac{207}{10}$ et $\frac{200}{10}$ lin. Radix baseos tubi prism. triangularis No. VI. sese habet ad radicem baseos tubi prism. quadrangularis No. II. vti 17 : 36. Altitudo capillaris in No. II. quadr. est $\frac{80}{10}$ lin. et quartus proportionalis ad hos tres numeros $\frac{169}{10}$ lin. designat. altitudinem capillarem tubi prismatici triangularis No. VI. quae in tabula inuenitur $\frac{177}{10}$ et $\frac{171}{10}$ lin. Inficias quidem ire non possum, in his tubis et in reliquis, si calculus inspiciatur, hunc non ad amussim congruere cum experientia; sed spero fore, vt haec differentia, cum sit exigua, non euertat legem antea traditam: altitudines capillares tuborum capillarium prismaticorum esse in ratione inuersa subduplicata basium.

Porro, quia circuli sunt inter se vt quadrata diametrorum, erunt quoque altitudines capillares in tubulis prismaticis inter se inuerse vt diametri circulorum basibus inscriptorum. Itidem, cum figurae regulares similes circulis inscriptae sunt inter se vt quadrata diametrorum circulorum circumscriptorum; altitudines capillares etiam sunt inter se inuerse vt diametri circulorum basibus circumscriptorum.

Peri-

Peripheriae circulorum ſunt inter ſe vt diametri, erunt itaque adſcenſus aquae in hos tubos ſeu altitudines capillares in ratione inuerſa peripheriarum circulorum baſibus tam inſcriptorum quam circumſcriptorum. Altitudines capillares ſunt quoque in ratione inuerſa quantitatum aquae eleuatae. Nam ſit altitudo aquae eleuatae ſupra libellam in tubo priſmatico ampliori $= A$, eius baſis $= Q^2$, denotet in arctiori adſcenſum aquae a, et baſin q^2. Erit $A : a = q : Q$, vti iam oſtendi: multiplicando extrema et media inter ſe erit $AQ = aq$ et cum AQ^2 et aq^2, dant quantitates aquae; diuidendo per aequalia AQ et aq, reſtant Q et q, radices nempe baſium. Sunt itaque quantitates aquae eleuatae vt radices baſium. Sed radices baſium ſunt inter ſe inuerſe vti altitudines capillares, ideo quantitates aquae erunt etiam inuerſe vti altitudines capillares, nempe erit $AQ^2 : Q = aq^2 : q$ et cum ſit $Q : q = a : A$, erit $AQ^2 : a = aq^2 : A$.

Quantum itaque altitudine aqua, quae in tubis gracilioribus adſcendit, ſuperat iſtam, in tubis amplioribus eleuatam, tantum haec illam quantitate.

Nunc diſpiciendum eſt, quomodo adſcenſus aquae in tubis capillaribus prismaticis ſe habeant ad illos, qui obveniunt in tubis capillaribus cylindricis; et an non generalis regula pro omnibus tubis capillaribus cuiuscunque figurae condi poſſit?

Regula pro tubus cylindricis ſtabilita ita ſonat: altitudines, ad quas aqua in tubos capillares ſupra libellam rapitur, ſunt in ratione inuerſa diametrorum.

Sit ACQ fig. 8. tubus capillaris prismaticus amplior triangularis aut quadrangularis; *acq* fig. 9. eiusmodi tubus arctior. Deſignet C, altitudinem adſcenſus aquae, Q radicem baſeos in ampliori, et c, altitudinem aquae eleuatae, q, vero radicem baſeos in arctiori, erit $C : c = q : Q$.

TBDE fig. 10, denotet tubum capillarem cylindricum ampliorem, $fbde$, fig. 11, arctiorem. E et e ſint altitudines, ad quas aqua aſcendit, D et d diametri B et b, baſes circulorum, erit $E : e = d : D$ ſed baſes circulorum ſint inter ſe vt quadrata diametrorum, ideo $B : b = D^2 : d^2$; extrahendo radices eſt $\sqrt{B} : \sqrt{b} = D : d$, poſſum itaque pro diametris radices ſubſtituere et dicere vti $\sqrt{b} : \sqrt{B}$ $E : e$. Igitur omnes altitudines tam in tubis capillaribus prismaticis quam cylindricis ſunt in ratione inuerſa ſubduplicata baſium.

Inſtitui inſuper et alia experimenta cum his tubis prismaticis, ſed cum phaenomena prorſus conueniebant, cum iis, quae in tubis cylindricis fuere obſeruata; ſupervacuum habeo iſta experimenta ſigillatim enumerare, ſufficiat potius praecipuas propoſitiones ex iis erutas hic apponere.

In tubis prismaticis ex aqua ſublatis et in aere perpendiculariter poſitis aqua ſuſpenſa haeret.

In tubis prismaticis ad horizontem inclinatis aqua aſcendit pro altitudine perpendiculari.

In vacuo aqua aſcendit in tubos hos prismaticos aeque ac in libero aere. In tubis, diuerſam amplitudinem in ſua longitudine continentibus, baſeos tubi ſupremae, ad quam aqua pertingit, ratio eſt habenda. In tubis vario modo inflexis aqua eleuatur pro altitudine perpendiculari. Mercurius in tubis prismaticis infra libellam conſiſtit et quidem quam proxime in ratione inuerſa ſubduplicata baſium.

Perti-

Pertinent quoque ad doctrinam capillarem phaenomena ſpeculis vitreis parallelis obſeruata. Videndum igitur eſt, an ſtabilita noſtra regula generalis et apud iſta locum obtineat.

Viri clariſſimi Hauksbeius et Muſchenbroekius deprehenderunt, altitudinem aquae aſcendentis intra ſpecula eſſe in ratione inuerſa diſtantiarum a ſe inuicem. Sit diſtantia maior duorum ſpeculorum inter ſe $= d$, altitudo aquae eleuatae $= a$, diſtantia minor $= D$, altitudo aquae eleuatae $= A$, erit $a : A = D : d$, et aqua eleuata repraeſentabit duo parallelepipeda. Sed ſi haec parallelepipeda reſoluantur in priſmata $d^2 a$ et $D^2 A$, quorum baſes ſunt quadrata diſtantiarum, conſtituunt d, D, latera ſeu radices, et erunt itaque altitudines aquae eleuatae in ratione inuerſa ſubduplicata baſium.

OBSER-

OBSERVATIONES ANATOMICAE RARIORES.

AVCTORE
I. C. Wilde.

Obſeruatio I.

De
Vena caua duplici aſcendente.

Anno 1737. extraordinarius et plane inſolitus in corpore cuiusdam cadaueris maſculi venae cauae ſtatus aperto abdomine oculis ſe obtulit. Iniectione in vaſa cruralia tam arterioſa quam venoſa facta, et remotis viſceribus tres ſub peritonaeo, iuxta et ſuper ſpina lumborum ſitae viſae fuerunt eleuationes, quae clarius detectae palam fecerunt, vnam et mediam aortam magnam, binas laterales vero duos venae cauae aſcendentis truncos conſtituere ſequentem in modum: aorta deſcendens, proceſſibus diaphragmatis egreſſura, ramos ſuos inſignes, coeliacum videlicet et meſaraicum ſuperiorem, qui poſterior duplo fere maior coeliaco erat, dabat. Hic meſaraicus ſuperior etiam de ſe ſpargebat cyſticam gemellam arteriam, quae conſueto prouentus modo alias ortum ſuum coeliaco debet. Aortae truncus deſcendens viam paullo plus dexterius ac ſolet, et ſuper ſpina lumborum ipſa ſumebat, in itinere ſuo emulgentes, ſpermaticas, meſaraicam inferio-

inferiorem, et lumbares, quasque consueto suo loco producens arterias: inferius diuaricabatur et vasa iliaca dimittebat. Vena vero caua ascendens non longe ab introitu in hepar, vbi vncialis crassitudinis existebat, ex duobus distinctis et aequalibus conflari truncis videbatur. Ita autem trunci ipsi erant locati, vt vnus dexter latus spinae dextrum, alter sinister eiusdem spinae latus occuparet sinistrum, et aortam vterque contineret mediam. Quo ab ortu istorum truncorum ipso, respectu itineris progressiui, quo sanguinem versus cor vehunt, et vbi vena caua ipsa implantatur, exordiamur, necesse erit ibi descriptionem inchoare, vbi diuisiones in vnum coguntur truncum; etenim iliacis tam internis quam externis post arterias iliacas congredientibus, truncus ille venae cauae ascendens solitarius conficitur, qui dextrum spinae latus possidens, penes renem succenturiatum dextrum in hepatis substantiam immergitur. In nostro subiecto, vti duo trunci venae cauae, sic etiam iliacorum immersio in sui lateris quemque truncum erat separatim conspicua, eo tantum discrimine, vt truncus incipiens sinistri lateris paullo inferior ac ille dextri lateris apparuerit; siquidem canalis quidam oblique transuersalis duas vncias longus et dimidiam vnciae crassus, super vertebra lumborum quinta et pone ramos iliacos arteriae magnae traiiciens, binos truncos copulabat, ita quidem, vt in dextri trunci latere prope distantiam vnius vnciae ab iliacis emergeret, inque sinistri lateris trunco, vbi iliaca vasa, vt externum atque internum, concurrunt, figeretur, in via vero et paullo sinisterius venam emitteret sacram. Trunci in itinere sibi pares post hunc transuerse obliquum et communicatiuum canalem diametrum dimidia vncia maiorem tenebant; latiores et ad tres quartas partes ſuperius, vbi coniunctionem ſubeunt, euadentes. Dexter truncus aſcendens non procul ab emulgente vena vas ſpermaticum dextrum ſuſcipiebat, paullo ſuperius vero venam emulgentem, quo iterum aliud vas ſpermaticum abſcedebat: ſiniſter vero truncus itidem ſub vaſis renalibus aſſumebat vas ſpermaticum ſiniſtrum, poſthac binas venas renales, ſuper renalibus denique in arcum dextrorſum vergentem et arteriam magnam transſcendentem excurrebat, in arcum vena atrabilaria ſiniſtra infigebatur. Lumbares venas quisque truncus ſui lateris fouebat, in vnum tandem, ſuppeditata inſula, combinati trunci ſtipitem ſesquiunciam longum principalem porrigebant, quem hepati committebant et qui hepar antequam ingrediebatur, venam atrabilariam dextram, vel potius breuem canalem, (quia ren ſuccenturiatus proxime ſtipitem adiacebat) admittebat.

Hic adiici meretur: ſiniſtrum hepatis lobum in hoc ſubiecto ſolito multo maiorem, lienem ad vsque protractum, ac cum illo ad quatuor vncias, quoad tunicas vtriusque proprias, concretum exſtitiſſe. Item ductum pancreaticum duplici trunco et inſertione gauiſum fuiſſe, in talem quippe modum efformatum: apud lienem, vbi pancreas incipit, ex ramulis conflabatur ductus; hic duas, et quod excedit, vncias progreſſus in binos alios dirimebatur ductus, quorum vnus et ſuperior in diſtantia duorum ferme digitorum transuerſorum ab altero verſus pylorum, alter et inferior vero cum cholidocho ductu, vti in homine ſolet, coniunctim duodenum inteſtinum pertundebat.

Tab.

Tab. VIII. Fig. 1.

A Arteria magna.
a . . . coeliaca.
b . . . mesaraica superior, ex quo cystica gemella emergit.
c c Arteriae renales.
d d . . . spermaticae.
e Arteria mesaraica inferior.
f Arteriae magnae diuisio in iliacos.
g g g g lumbares arteriae.
B Stipes venae cauae principalis hepar ingrediens.
C Truncus v. cauae dexter.
D . . . . sinister arcum super aorta faciens.
E Communicationis canalis v. cauas intersitus
e Vena sacra.
F F Vasa iliaca interna.
G G . . . . externa.
h h Venae spermaticae dextrae.
i Vena spermatica sinistra.
K K K Venae renales.
l Vena atrabilaria sinistra.
L L Renes.
M M . . . succenturiati.
N Crepido, vbi stipes hepar intrat.
O Diaphragma reflexum.
P P Processus musculi diaphragmatis.
Q Q Vreteres.

Tab. VIII. Fig. 2.

Monſtrat communicationis canalem, duabus venis cauis inſertam.

Obſeruatio II.

De

Vena iugulari externa, quoad progreſſum, triplici, quoad inſertionem autem quadruplici.

Viſu conſideratuque elegans venarum iugularium externarum in cadauere quodam, 1738. diſſecto, trigeminis truncis obuiarum conſtitutio ſequens nobis occurrit.

Cute colli myodeque expanſione demta, extraordinarius tracheam ſupercurrens conſpectus fuit atque ſatis largus ramus, qui capiti propior factus ſe ſiniſtrorſum poſt glandulam thyroideam abſcondebat. Hic ramus a ſubclauia vtrinque inter venas iugulares externam et internam medius, duabus quaſi radicibus propullulabat, quae radices craſſitie quidem impares, ſed conuergentes, in media tracheae parte coibant et ramum, magnitudine iugularibus nil cedentem, praebebant. Hic ramus inſignis, dum muſculos ſterno-hyoideum et thyroideum ſiniſterius incedens transcenderet ſuper glandula thyroidea ſiniſtri lateris quaſi immergebatur, et per canalem breuem, quatuor lineas longum, cum vena ingulari interna ſiniſtra copulabatur. Haec iugularis interna principali ſuo ramo e ſinu laterali durae meningis, reliquis vero huc approperantibus et minoribus ex muſculis capitis et capite ipſo ſanguinem vehebat. Truncus vero extraordinarius et acceſſorius magis ab anteriori colli et interiori linguae

parte

parte, nec non a glandula thyroidea ramulos ſuos atque ſurculos accipiebat. Radix huius dextra ramo a glandula thyroidea deſcendente inſtructa erat; ſiniſtra vero, vt anguſtior, ſic nullis omnino ramulis gaudebat. Iugulares externae, in diametro multo minores internis, aduentabant ab exterioribus et muſculoſis tam colli quam faciei partibus; et radices iuxta praedictas exterius in ſubclauiis implantabantur. Hinc inde prodeuntes ſurculos cum ramulis trunci extraordinarii in anaſtomoſeos vinculum congredi vel ex eo pateſcebat, quia inflato vno trunco, alter ſtatim flatum admittebat. Propter hanc ramulorum communicationem, et propter huius venae acceſſoriae inſertionem quoad venas iugulares externas, immo propter ſitum exteriora magis reſpicientem, hanc venam inferius bifurcatam potius iugularibus adnumeramus externis, quam internis, quamquam propter congreſſum cum iugulari ſiniſtra interna et propter priuatum cum externis conſortium et diſtinctam inſertionem aliis ad internas magis referendam illam eſſe aptius videri poſſit. Communitas interim venarum iugularium internarum, externarum, et ſubclauiarum, intermedio deſcripto ramo, caput huius ſubiecti omnino commodius atque facilius ab onere ſanguinis ſubleuare potuit ac debuit, ac nec in alio ſperare licebit.

Tab. VIII. fig. 3.

A, Truncus iugularis externus extraordinarius.
B, Eius communicatio cum iugulari interna.
C C, Eiusdem radices, quarum dextra ramum *c.* a glandulis thyroideis ſuſcipit, ſiniſtra vero multo erectior exiſtit.

D D, Insertiones apud venas iugulares externas.
E E, V. iugulares externae.
F F, V. subclauiae.
G G, V. iugulares internae.
H, ductus thoracici insertio.
I, V. caua descendens.

Obseruatio III.

De Venae azygos trunco duplici.

Hominis venae sine pari varia et singularia incessus atque distributionis apud auctores consignata exempla prostant. Nostra quam exhibemus venam azygon duplicem, hunc in modum constituta fuit. Truncus ad latus spinae dorsi vtrumque singularis, magnitudine minimo digito aequalis, notatus fuit; dexter ceu principalis truncus suam ac alterius trunci sarcinam in venam cauam descendentem transuehens, ex interstitio intercostali, vt videbatur, vltimo et regione lumbari apud vertebram lumborum primam ortum capessebat; quatuor inter ascendendum intercostalibus ramis assumtis communicationis canalem super corpore vertebrae dorsi nono oblique appropperantem recipiebat, et iterum duobus aliis ramis sibi vindicatis, alium communicationis canalem septimae vertebrae corpus oblique transcendentem fouebat. Vlterius progrediendo, quatuor intercostales ramos suscipiebat, quorum primus tribus aliis, ex interstitiis intercostalibus supremis accurrentibus ramis, conflatus erat; truncus tandem, super bronchia dextra reclinatus, in venam descendentem ipsam consueto loco immergebatur.

Alter

Alter et ſiniſter truncus tribus apud primam vertebram lumbarem ramis incipiebat, quos inter vnus diaphragmaticum inferiorem, alter iuxta proceſſum diaphragmatis a tunica peritonaei adipoſa accedens adipoſum, tertius vero a muſculo quadrato et interſtitio, quod inter vltimas coſtas eſt, aduenieus, lumbarem et intercoſtalem vltimum conſtituebant: aſſurgentem duo rami intercoſtales intrabant, poſt canalis vetebram nonam ſuperſcandens ſequebatur: tribus deinde intercoſtalibus ramis in truncum hunc ſiniſtrum inſertis, canalis communicationis alter ſeptimam dorſi vertebram ſuperans aſſociabatur: poſtremo adhuc tribus intercoſtalibus in truncum immiſſis ſuperius ramus accedebat in arteria aſpera et oeſophago ortum ducens; tandem ramus ſupremus inſignis, duobus ramulis ab interſtitiis intercoſtalibus ſuperioribus aduentantibus compoſitus intercoſtalem ſuperiorem ſiniſtri lateris dabat.

Quoad ſitum horum truncorum notandum venit, ſiniſtrum huius azygae truncum profundiorem aliquatenus poſitum viſum fuiſſe prae illo dextri lateris. Vena praeterea caua tam deſcendens quam aſcendens amplitudine quaeque conſueta et haud diminuta deprehenſa fuit.

Tab. VIII. fig. 4.

A A, Vertebrae ſpinae dorſi.
B B B, - - - - tres lumbor.
C, Truncus V. azygos dextrae.
c c c c etc. Venae intercoſtales.
d, princip. huius trunci.
c, ramus intercoſtalis ſuper.

F.

F, truncus V. azygos ſiniſter.
c c c c etc. Venae intercoſtales.
g, ramulus diaphragmaticus inferior.
h, - - - - adipoſus.
i, - - - - lumbaris.
k, - - - - arteriae aſperae et oeſoph.

Obſeruatio IV.

De

Muſculo ſingulari gemino ſternum ſuperiacente.

Anno 1739. in cadauere virili muſculorum par ſingulare, ſuper ſterno ſitum, contemplati ſumus. Illud, vti conſpectum fuit, litteris atque icone ſiſtimus. Ad latera oſſis ſterni tractus fibrarum carnoſarum longitudinalium obueniebat, quae an ad platysmamyoides referendae ſint, vel alium repraeſentent muſculum ex examine indagatiori inclaruit: nempe remotis remouendis patuit iuxta cartilaginem xiphoidem vtrinque muſculum locari ſesqui digitum latum: porro innotuit, hunc ipſum muſculum geminum, ſuperato dimidio ſterno, in tendinoſam ſiue aponeuroticam abire conſtitutionem ad vsque clauiculas continuantem; deinde aperte dignoſci potuit, hanc aponeuroſin ſiue tendinem clauiculas transgredientem cum ſterno-maſtoideo muſculo anterius intime connecti: ſeparatim hic muſculus geminus, quousque carnoſus erat, incedebat; in tendinem vero ſtructura tribus oblique transverſis productionibus tendinoſis atque anſulis mutuo coniungebatur; congreſſum cum maſtoideo per lineam conſpicuum antopſia ipſa probabat. Muſculus hic quaſi bicorporeus et capiti et pectori inſeruiiſſe videtur.

Tab. VIII.

Tab. VIII. fig. 5.

A A Musculi gemini, carnoso principio.
B B - - - - - tendinosus progressus.
C C C - . - - ansulae tendineae.
D D - - - - - carnosi fines cum
d d Mastoideis musculis iuncti.
E E Clauiculae transparentes.
F F Musculi pectorales magni.
G Musculus deltoides.

Obseruatio V.

De

Tendinum, digitos manus sinistrae extendentium, extraordinario numero.

Quemadmodum naturam aliquando in musculorum fabrica variare animaduertere licet; sic haud minus tendines quorundam musculorum crassitudine vel numero adaugeri conspicuum obuenit. A tali augmentatione vel pluralitate roboris maioris vim et diuersimodam partis institutionis atque quandoque actionem singularem in homine vno atque altero dependere, nemo facile, qui musculos cum tendinibus tanquam motuum instrumenta principalia esse cognoscit, ibit inficias.

In subiecto quodam, quod nobis 1740. ad dissecandum oblatum fuit, vidimus manum sinistram, quoad tendines digitos extendentes, multo a dextra, quae, vt solet, constituta erat, differentem, quippe dorsum eius tendinibus quasi obrutum erat. Quo tales tendines, numero duplicatas specialius indicemus, musculos phalangarum extenſores, tam communem quam proprios conſiderabimus.

Muſculus huius manus, vel potius digitorum extenſor communis, quoad oriundi principia in condylo humeri externo ac parte poſteriori vlnae atque radii, vt ſolet, naſcebatur, carnoſus vltra dimidiam ſui partem procedebat, in 4. poſthac productiones tendinoſas, ligamentum annulare traiicientes, excurrebat, quarum prima ſuper indicis, ſecunda ſupermedii digiti phalangis in latere interiori protendebatur, tertia in duos abſcedebat tendines, qui, ligamento tranſuerſo ſuperato, iterum dirimebantur, binisque ſingulis tendinibus digitis annulari atque auriculari donatis finiebant, illo excurſus diſcrimine, vt tendo duplicatus vnus ſeparatim annularis digiti phalangas transcenderet, alter digiti minimi vero poſt ligamentum annulare quidem geminatus, apud extremitatem oſſis metatarſi, quod digitum iſtum ſuſtinet, iterum coiret, et ſic adunatus phalangas praedicti digiti, ad latus interius tranſcurreret; quarta denique duos ablegabat tendines, quorum vnus et interior poſt ligamentum tranſuerſale diuaricatus os metatarſi et digitum minimum tranſcendebat; alter exterius latus tam metacarpi, quam digiti occupans, iuxta phalangas ipſas deſinebat, et ſic dictum auricularem proprium praebebat. Nouem itaque tendines hic muſculus, qui alias tantum 4 aut 5 (quia auricularis proprius cum eo cohaeret) dimittit, emittebat. Reliqui qui adiacebant muſculi extenſores proprii, vt indicator et bicornis in media vlnae ac radii parte nati carnoſa prodibant coniunctione, ita vero, vt indicator mox ſeparatus ante ligamentum binos produceret tendines, vnum ſuper indicem, alterum

alterum ſuper digitum medium, exterius latus reſpicientes, exporrectos; extenſor autem pollicis non longe a ligamento in quinque diuideretur tendines ex quibus vnus in phalange pollicis vltima et latere exteriori, alter eiusdem in ſecunda, tres caeteri vero in oſſe metatarſi, quod pollici ſuſtentaculo eſt, terminabantur. Loco trium vel 4 (ſi extenſor pollicis tricornis eſt) tendinum igitur, 7 hic notabantur tendines, et ſic in his propriis aeque ac communibus muſculis, numero quam quem natura alias largiri ſolet, alterum tantum plures.

Tab. IX. Fig. 1.

A Muſculus extenſor digitorum manus communis, in 4 productiones tendinoſas excurrens, quorum

1. dat tendinem indici.
2. porrigit medio.
3. ante ligamentum transuerſale duplicatur, et poſt ligamentum iterum ſingulus tendo geminatur, et ad annularem duos, totidemque tendines ad auricularem ablegat.
4. duos tendines ad minimum digitum dimittit, interior poſt ligamentum denuo partitur, exterior auricularem proprium repraeſentat.

B muſculus indicator proprius 2 tendinibus conſpicuus, quorum vnus indici, alter medio digito impertitur.

C muſculus pollicis proprius, bicornis vel tricornis dictus tendinibus 5 phalangibus et oſſi metatarſi pollicis inſertis, obuius.

Obſeruatio VI.

De Inteſtino coeco et proceſſu vermiculari.

Nonnunquam obtigit, praeter glandulas meſenterio humano ſolitas, prope angulum, quem ileum et colon coniuncta faciunt, vnam glandulam nucem moſchatam aequantem, vel duas ac plures ſimul congregatas, ſed minoris differentisque magnitudinis vidiſſe.

In quodam eiusmodi ſubiecto, cuius coecum inteſtinum eiusdem cum colo amplitudinis et digitum transuerſum tantum longum erat, ac cuius fundus in proceſſum vermicularem finiebat, inter ileum et colon, glomum, plus quam triginta glandularum, auellanas, pinearum nuces et piſorum magnitudinem aequantium conſpexi: Vaſa itidem a colo, coeco, et appendicula vermiculari accurrentia lymphatica, non ſolum quia tumebant lympha, oculis luſtrare, ſed etiam quaedam ſingularis amplitudinis cernere dabatur. Haec vaſa tam ſuperficiem coli, coeci, et appendiculae perreptabant, quam glandularum cohorti ex parte appropinquabant, ex parte vero per meſocolon, meſaraeum ipſum intrabant. Hoc interim hic adferre praeterire non poſſumus, flatum ramis venoſis, colo coecoque vicinis, immiſſum vtrumque penetraſſe inteſtinum vtrumque eleuaſſe. Quod phaenomenon et alio tempore et in aliis inteſtinorum tam tenuium quam craſſiorum portionibus expertus ſum.

Aliud, quod hac occaſione haud intactum relinquere volumus, nobis alio tempore obuenit inteſtinum coecum, eiusdem tantum cum colo diametri, proceſſumque vermicularem bis circumtortum habens. Hoc coecum, tanquam

quam appendix coli, quia vix latum digitum ab insertione ilei protendebatur, processum vermicularem spiraliter tortum atque retortum et 5—6 vncias longum in fine suo gerebat assidentem, qui processus in principio ceu infundibulum excauatum dilatabatur, et digiti pollicis capax erat, post vero in vermicularem formam angustabatur; vbi coecum intrabat, valuula spirali instructus erat, quae ovale digiti apicem comprehendens foramen suppeditabat, apud foramen intestinum coecum, vt dictum, breue incipiebat, et recessu quodam siue sinu et valuula conniuente ab ileo, quod iuxta patebat, et a colo, quod ante valuulam Bauhini ascendebat, discriminabatur. Hic processus, quemadmodum singulariter constructus et locatus imo magno orificio patulus erat, sic facile illum recrementa ingredi immo ibi stabulari poterant; hinc non multum mirati sumus, quod illum processum scybalis induratis tumidum et constipatum reperiremus. Praeterea inter ileum et colon tres adhuc glandulas, nucem auellanam magnas, simul offendimus.

Tab. IX. Fig. 2.

Monstrat portionem coli atque ilei cum coeco, admodum breui, atque appendicula vermiformi, in fine coeci pendente.

A A A Vasa sanguifera, atque iuxta decurrentia vasa lymphatica.

B B Glandularum in angulo ilei atque coli residentium cohors.

C C Vasa lymphatica, mesaraeum versus tendentia,

D Ligamentum coli.

Tab. IX. Fig. 3.

Oſtendit aliud coecum admodum breue cum ſua appendicula ſpirali.

A Portio inteſtini coli.
B Inteſtinum coecum.
C Initium appendiculae magnopere dilatatum.
D Reliqua eius portio anguſtata atque ſpiralis.
E Portio inteſtini ilei.
I Vaſa ſanguifera.
G Tres glandulae colo et ileo adſitae.

Tab. IX. Fig. 4.

Exhibet eiusdem interiorem faciem, in qua praeter valvulas conniuentes obuiam eunt

A Orificium ilei ſ. dicta valuula Bauhini, hic admodum hians.
B Orificium appendiculae, cum valuula ſpirali.

DE RENIBVS SVCCENTVRIATIS IN PVERO DISQVISITIS NOTATA.

AVCTORE

I. C. Wilde.

Puerum 3 - 4 annos natum 1739. menſe martio quoad renes ſuccenturiatos perſcrutatus ſum, ſequentiaque animaduerti.

Tunica adipoſa renes circumueſtiens ex parte etiam renes ſuccenturiatos cingebat, ita, vt prae illa glandulae iſtae renales vix internoſci vel diſtingui poſſent. Sed tunica ipſa paullulum ablata, vaſa ſuccenturiatorum facta ſunt perſpicua, quae inſequendo corpora manifeſtarunt ipſa. Erant autem illa vaſa partim arterioſa partim venoſa. Arteriarum, quas notabimus quaternas, binae propriae, alterae binae communes non oppoſite aequalem ſumebant originem; propriarum ſcilicet dextra ab emulgente dextra ipſa, quae alias etiam a trunco aortae poſt meſaraicam ſuperiorem propullulat. Siniſtra vero, quae aliquando quoque ex coeliaca prouenit, penes radicem meſaraici rami ſuperioris ex trunco ipſo aortae naſcebatur, vtroque vero, (quam quoque in adultis ſubiectis vel vnius vel vtriusque lateris gemino principio atque trunco, anterius vno, altero poſterius capſulae latus ſuis ramis percurrente vidimus) in corporibus ſuccenturiatorum ipſis diſtribuebatur. Communium vero vel potius arteriarum phrenicarum

rum posteriorum, quae consueto modo ex coeliaca incipiente ipsa prodeunt, altera summitatem dextri renis succenturiati praetergrediens, ex angulo, quem truncus arteriae et ramus coeliacae efficiunt; altera vero super sinistro progrediens paullo inferius et infra coeliacum, mesaraicum ramum superiorem versus, proueniebat, vtraque diaphragma versus assurgens arcum dabat, qui dum capsulam renalem praeteriret, varios ramulos ceu radios in superficie capsulae in surculos sese dispergentes dimittebat, superius vero ramis insignibus diaphragma petebat. Flatu arteriis propriis commisso et capsulae adiposa tunica singulatim eleuabantur, quod aeque quidem, si arteriae phrenicae siue communes insufflarentur, sed non tam eminenter fiebat; incisa porro tunica adiposa, aer contentus euanuit remanentibus capsulis ipsis tumidis. Nostrum, quod circa haec phaenomena est iudicium, putamus, quia ramuli tam ab atrabilariis quam phrenicis tunicam adiposam perreptant, apprehensu facile esse, etiam praefatam adiposam flatu distendi, dum autem ramuli admodum exigui et pauci a phrenicis illam tunicam adrepunt, capsulaeque atrabilariae etiam superficie tenus quasi tantum illis percurruntur, nec tunicam pinguedinosam, nec capsulas a flatu phrenicis immisso eodem modo attolli, tunicam adiposam inflatam vero, vulnusculo facto, subsidere relictis capsulis elatis posse, quia rami phrenici et his et illi ramulos largiuntur singulos diuersos. Vasa caeteroquin venosa a consuetis locis, vt dextri lateris vena atrabilaria a v. caua ipsa, sinistri lateris ab emulgente procedebant, vtraque vena insufflata capsulae nimium eleuabantur. Capsulae ipsae in nostro subiecto ceu massa vesiculosa adipe obscure

obſcure albido conſtans et pinguedine circumuoluta conſiſtentia admodum ſimiles comparebant, vnde primo intuitu adipem mentiebantur et nobis ipſis imponebant: inſufflatae maiorem iuglandem aequabant et aliquo modo pellucidae conſpiciebantur; ſed vtraque cauitate intus aequali erat praedita et gelatinoſo pallide rubro tincta et obducta humore.

Tab. IX. Fig. 5.

Oſtendit partes quasdam hypochondrii a poſteriori facie conſpicuas ex adulto homine.

A A Renes.

B B - - - ſuccenturiati.

c Arteria aorta.

D Vena caua.

E E Arteriae atrabilariae.

e e Venae atrabilariae.

F F Arteriae phrenicae cum radiatis ramis in capſulas demerſis.

G Hepar.

H Lien.

I I Diaphragma reflexum eiusque i i. proceſſus.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE.

OBSERVATIO

ECLIPSIS SOLARIS

d. $\frac{\text{24 Iulii}}{\text{4 Auguſt.}}$ 1739.

In Obſeruatorio Imperiali Petropolitano habita

a G. Heinſio.

Ordo Obſer.	Tempus verum						
1. -	5h. 10′. 49″.	Initium eclipſeos per tubum 15. ped. exacte obſeruatum. In partibus ſcalae, qualium ſemidiameter Solis continet 267					
		Differentia aſcenſ. rectar. centr. ☉ et ☽.	Differentia declination. centr. ☽ et ☉.	Quantitas phaſium	Quantitas phaſium in digitis.	minut.	
2. -	17. 27.	439½.	164½.	49.	1.	6	
3. -	22. 24.	400½.	154.	89.	2.	0	
4. -	30. 45.	340.	138.	147½.	3.	19	
5. -	37. 3.	295½.	123½.	197.	4.	26	
6. -	41. 59.	256.	114.	237.	5.	20	
7. -	47. 11.	Macula erat in diſco Solis magnitudine reliquas ibi exiſtentes antecellens, quam littera M deſignaui in fig. 1. Appulſum limbi Lunaris ad eam obſeruaui, et conta-					

Tab. X.

 ctum

ctum mutuum ad tempus iam notatum animaduerti. Declinauit autem istius maculae centrum circa tempus eclipseos a centro Solis versus austrum 92. part scalae seu 5′. 29″ circuli maximi; quoad ascensionem vero rectam maculae centrum occidentalius fuit centro Solis 53. part. scalae seu $13\frac{1}{4}$ secund. in tempore

8. - 47. 51. Peripheria Lunae per medium dictae maculae transit. Praecedens et haec obseruatio facta est per tubum 15. ped.

9. - 58. 1. 136. $81\frac{1}{2}$. 359 8. 4

10. 6. 4. 26. 88. $169\frac{1}{2}$. $405\frac{1}{2}$. 9. 7

Ab obseruatione prima ad hanc vsque centrum Lunae occidentalius fuit centro Solis quoad ascensionem rectam. In sequentibus centrum Lunae orientalius intelligi debet centro Solis.

11. - 18. 10. 22. $42\frac{1}{3}$. 468. 10. 31

12. - 28. 50. $109\frac{1}{2}$. 19. 405. 9. 6

13. - 38. 15. Medium supra memoratae maculae emersit.

14. - 39. 0. Integra macula emersit, vtraque obseruatio facta est per tubum 15. ped.

Ab

Ab obseruat. 1. vsque ad 12. centrum Lunae a centro Solis declinauit septentrionem versus. In sequentibus declinatio centri Lunae a centro Solis versus austrum accipi debet.

15.	-	54.	57.	$312\frac{1}{2}$.	35.	202.	4.	32
16.	7.	1.	7.	$363\frac{1}{2}$.	$47\frac{1}{2}$.	150.	3.	22
17	-	7.	21.	$415\frac{1}{2}$.	58.	$98\frac{1}{2}$.	2.	13

18 - 18. 53 Finis eclipseos exacte obseruatus per tubum 15. ped.

Figura prima Phases enumeratas declarat et numeri in semita centri Lunae adscripti notant loca, in quibus centrum Lunae fuit iis temporis momentis, quae iisdem numeris in praecedenti recensione insigniuntur. Coelum toto eclipseos tempore serenum obseruationi optime favit. Cum autem Sol deficiens ad horizontem occiduum vergeret, ne refractionis diuersitas ad horizontem obseruationibus vim inferret, pro obseruandis eclipseos phasibus methodum sequentem extra periculum refractionis positam adhibui. Vsus nempe sum quadrante portatili tubo instructo, in cuius foco duo fila V T, H R, ad angulos rectos sibi insistentia extabant. Tubum in Solem direxi sic, vt posito quadrantis plano in situ proxime verticali, filum H R situm prope horizontalem, filum V T verticalem, nanciscerentur. His factis notaui moram transitus disci solaris vel per filum horizontale H R vel per verticale V T, prout scilicet totius disci transitus, habito partis Solis deficientis respectu, obseruari potuit. Praeterea animaduerti momenta appulsus cornuum phaseos, limbi Lunaris et limbi Solis ab eclipsi immunis ad idem filum siue horizontale siue verti-

Tab. XI. Fig. II.

verticale. Quibus datis constructio phaseos absolui et positio centri Lunae respectu centri Solis et circulorum coelestium, nec non quantitas diametri Lunae definiri possunt.

Repraesentent H R, V T fila ad angulos rectos sibi insistentia, A D B exhibeat discum Solis vtrumque filum tangentem in A et B. Referat R C I positionem diurni centri Solis respectu filorum V T, H R; radius vero CD (C B vel A C) expressus intelligatur per partes temporis, quo dimidium disci Solis per meridianum vel horarium quemuis transit. Et exponet C R semimoram transitus disci Solaris per filum HR. EC vero semimoram transitus Solis per filum VT. Concessis igitur mora transitus Solis per horarium et mora transitus eius per alterutrum filum H R vel V T, dabitur positio diurni R C I respectu filorum.

Fig. 2. Notati iam sint appulsus cornuum B, A, periphaeriae Lunae M et limbi Solis sequentis F, ad filum V T. Descriptus sit discus Solis A B F vtrumque filum tangens et quidem limbo sequenti F filum V T; expressa autem sit diameter disci per moram transitus eius per horarium. Sit R C positio diurni centri Solis respectu filorum secantis filum V T in E. Capta sit E *b* aequalis interuallo temporis inter appulsus cornu B et limbi Solis F ad V T. Eodem modo sit E *a* aequalis interuallo temporis inter appulsus cornu A et limbi solis F ad V T; nec non E *m* aequalis interuallo temporis inter appulsus peripheriae Lunae M et limbi Solis F ad V T. Per puncta *b*, *a*, *m* sic definita actae intelligantur ad V T parallelae *b* B, *a* A, *m* μ; quarum *b* B secet peripheriam Solis in B, *a* A in A; et dabuntur loca cornuum B, A in peripheria disci Solis, rectam vero *m* μ tanget limbus Lunae. Datis iam pun-

punctis A, B, et recta $m\,\mu$ positione, dantur centrum G et radius circuli per puncta A, B transeuntis et rectam $m\,\mu$ tangentis, hoc est, dantur centrum Lunae positione et semidiameter eius magnitudine. Huius rei vlteriorem et analyticam expositionem dedi in recensione obseruationis eclipsis Lunaris d. 8. Septembr. 1737. st. n. Simili modo proceditur, si aliae dentur obseruationum conditiones.

Haec phaseos constructio, quae satis expedita videtur, supponit discum Lunae intra discum Solis immotum interea, dum appulsus cornuum et limbi Lunae ad fila tubi obseruati sunt. Hoc autem supponere non licet, nisi eximiis subinde erroribus locum concedere velimus. Discus Lunae intra discum Solis situm continuo mutat, adeoque momenta appulsus cornuum obseruata multum saepissime discrepare debent a momentis, quibus appulsus isti obseruati fuissent, si discus Lunae intra discum Solis durante obseruatione immotus perstitisset. Si igitur iuxta methodum supra expositam constructio phaseos suscipi debeat, necesse est, vt appulsus cornuum et limbi Lunae ex obseruatione acquisiti correctione aliqua tales efficiantur, quales obseruati fuissent, si Luna situm in disco Solis interea non mutasset.

Pro definiendis eiusmodi correctionibus requiritur, vt sciatur, qua ratione progressus Lunae per discum Solis factus sit. Ad hunc ergo cognoscendum proiectionem eclipseos orthographicam effeci ope elementorum, quae calculus ex Tabulis Ludovicianis institutus subministrauit, exinde vero positionem semitae visae centri Lunae per discum Solis determinaui. Exponat figura 3. proiectionem, qualis pro eclipſi Solari fieri ſolet. Sint ADB ſemidiſcus Terrae, AB Ecliptica, DC circulus latitudinis, PC meridianus vniuerſalis, FI orbita Lunae, o. 1. 2. 3. 4. etc. parallelus Petropolitanus in ſuas horas iuxta numeros 1, 2, 3, 4 etc. diuiſus. Cum momenta initii et finis eclipſeos obſeruata aliquot minutis deſcreparent ab iis, quae calculus praedixerat, conſultum duxi, vt momenta iſta ex obſeruatione acquiſita ſchemati infererentur. Hunc in finem in parallelo Petropolitano determinaui puncta *i* et *f* reſpondentia reſpectiue momentis initii 5^h, $10'$, $49''$, et finis 7^h, $18'$, $53''$. Ex punctis iſtis *i* et *f* interuallo ſemidiametri penumbrae interſecui orbitam Lunae in I et F; quibus factis obtinui loca centri Lunae in initio et fine eclipſeos, puta in I et F; nec non interuallum IF in orbita Lunae, quod tempori durationis Eclipſeos reſpondet. Inde facillime puncta V. VI. VII. etc. in orbita Lunae definire potui, in quibus centrum Lunae reſpectiue fuit horis V. VI. VII. etc. Iam ex diuiſione paralleli Petropolitani innotuerunt puncta 5. 6. 7. etc. in quibus centrum Solis fuit horis 5. 6. 7. Igitur ad datam quamuis horam poſitio centri Lunae reſpectu centri Solis et circuli alicuius coeleſtis incognita eſſe non potuit. Verbi cauſa ad horam 5tam quaeri debeat poſitio centri Lunae reſpectu centri Solis et circuli declinationis eius. Quoniam hora 5ta centrum Solis eſt in puncto 5. paralleli Petropolitani, per hoc punctum 5. duco rectam GH parallelam ad PC meridianum vniuerſalem; et GH repraeſentat poſitionem circuli declinationis Solis. Sed eadem hora 5. centrum Lunae eſt in puncto V. ſuae orbitae, quamobrem duco VG ad GH perpendicularem, vt vt per rectas V G, G 5. acquiram positionem centri Lunae respectu centri Solis et circuli diclinationis G H. Scilicet hora 5. recta V G exhibet differentiam inter ascensiones rectas centrorum Solis et Lunae in diurno; G V 5. vero exponit differentiam declinationum centrorum Solis et Lunae.

Hac methodo ad singulos horae quadrantes determinaui differentias ascensionum rectarum et declinationum centrorum Solis et Lunae. Descripsi deinceps circulum P D Q (fig. 4.), cuius radius C P est ad radium disci Terrae D C (fig. 3), vt semidiameter Solis ad parallaxin Lunae horizontalem. (In adiecta fig. 4. circulus P D Q iusto maior euidentiae causa factus est). Assumta porro diametro P Q pro circulo declinationis, ex cognitis per constructionem praecedentem ascensionum rectarum et declinationum differentiis ad singulos horae quadrantes definiui puncta $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, 6. etc. in quibus centrum Lunae respectiue fuit horis $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, 6. etc. Denique punctis istis ope rectarum inter se connexis acquisiui semitam centri Lunae visam in disco Solis pro immoto habito. Necesse autem fuit, vt ad singulos horae quadrantes loca centri Lunae determinarentur,, partim quia portiones semitae visae à centro Lunae singulis horae quadrantibus percursae ex continua parallaxeos Lunae mutatione sunt inaequales, partim quoniam ipsa semita curuam nanciscitur figuram, dum declinatio Lunae non solum ex motu eius proprio, sed ex variata quoque Lunae parallaxi continuo mutatur.

His praeparatis correctiones obſeruationum ſupra dictas ſequentem in modum inueſtigaui. Exempli loco habitae ſint obſeruationes appulſuum ad filum V T (fig. 2.)

Cornu B	$5^h\ 30'.\ 45''.$
curnu A	$-\ 31\ .\ 1\frac{1}{2}.$
peripher. ☽ in M.	$-\ 31\ .\ 17\frac{3}{4}.$
limbi ☉ ſequentis F	$-\ 33\ .\ 6\frac{1}{2}.$

Cum in ſemita centri Lunae viſa (fig. 4) dentur puncta $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, in quibus centrum Lunae extitit horis $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$; ex interuallo horum punctorum 15. minutis temporis reſpondente, ſi motus Lunae in orbita viſa per quadrantem horae vniformis ſupponatur, facile determinari poſſunt puncta f, g, k, in quibus centrum Lunae reſpectiue fuit $5^h.\ 30'.\ 45''$; $5^h.\ 31'\ 1\frac{1}{2}''$, $5^h.\ 31'.\ 17\frac{3}{4}''$. Semidiametro Lunae, cuius ratio ad ſemidiametrum Solis ex calculo eclipſeos datur, centris f, g, k deſcripti ſint arcus B M A, $b\ a$, $\beta\ \mu\ \alpha$, intra diſcum Solis, qui exponent ſitum peripheriae Lunaris in Sole ad dicta reſpectiue momenta. Igitur momento $5^h.\ 30'.\ 45''$. appulit ad filum verticale quadrantis cornu ſeu punctum B peripheriae Solaris, cornu autem A tunc temporis extitit in A. Momento $5^h.\ 31'.\ 1\frac{1}{2}''$ cornu A iam proceſſit in a, adeoque hoc momento punctum peripheriae Solaris a appullit ad filum verticale. Denique momento $5^h.\ 31'.\ 17\frac{3}{4}''$ peripheria Lunae in $\beta m\alpha$ poſita filum quadrantis verticale tetigit. Hi ergo appulſus in diuerſis Lunae intra diſcum Solis poſitionibus obſeruati ſic corrigi debent, vt tales prodeant, quales obſeruati fuiſſent, ſi durante appulſuum obſeruatione Luna ſitum in diſco Solis non mutaſſet.

Ad

Ad circulum declinationis P Q per centrum Solis C ducta ſit normalis D E, quae diurnum Solis repraeſentabit. Igitur cum per ſupra dicta in quauis obſeruatione detur poſitio diurni reſpectu filorum, ad quae appulſus obſeruati ſunt; viciſſim in fig. 4. dabitur poſitio filorum reſpectu diurni D E. Exponat ergo VT filum verticale ad quod appulſus notati ſunt. Per A, *a*, ductae intelligantur A*b*, *ai*, parallelae ad VT et ſecantes diurnum D E in *b* et *i*; et manifeſtum eſt, punctum *b* ſimul cum cornu in A, punctum *i* ſimul cum cornu in *a* ad filum verticale V T appellere. Si igitur detur tempus, quo ſpatiolum *bi* filum V T traiicit, dabitur interuallum temporis inter appulſus cornu in *a* et cornu in A. Expreſſa autem diametro Solis DE per partes temporis, quo diſcus Solis meridianum tranſiit; exponet ſpatiolum *ib* tempus, quo *ib* filum VT traiecit, vnde propter *ib* ex conſtructione datam, dabitur interuallum tempotis inter appulſus cornu in *a*, et cornu in A, veluti in noſtro caſu $= \frac{1}{3}''$. Iam momentum appulſus cornu *a* ad VT ex obſeruatione datur, ſcilicet $5^h. 31'. 1\frac{1}{2}''$. Subtrahendo igitur ab hoc momento interuallum inuentum $= \frac{1}{3}''$, (quoniam A citius per V T quam *a* tranſiit,) habebitur momentum appulſus ipſius A ad V T, veluti $5^h. 31'. 1\frac{1}{6}''$, quod eſt momentum, quo cornu in A appuliſſet ad V T, ſi centrum Lunae in *f* immotum perſtitiſſet.

Eodem modo ſi ad V T ducantur parallelae *qn*, *po*, tangentes reſpectiue limbum Lunae B M A, β *m* α in M et *m*, et ſecantes diurnum D E in *n* et *o*; ſpatiolum *no* exponet interuallum temporis inter appulſus limbi

Lunae $\beta m\alpha$, et B M A ad V T, quod exempli loco in hoc caſu erit $= 1\frac{1}{4}''$. Cum ergo ex obſeruatione detur momentum appulſus limbi Lunae $\beta m\alpha$, nimirum $5^h. 31'. 17\frac{3}{4}''$, ſubducendo interuallum inuentum ab hoc momento (quia B M A citius traiecit V T, quam $\beta m\alpha$) habetur $5^h. 31'. 16\frac{1}{2}''$ pro momento appulſus peripheriae Lunae in B M A, quo caſu centrum Lunae adhuc in f extat.

Ex obſeruatione datur momentum appulſus cornu B, $5^h. 30'. 45''$, centro Lunae in f exiſtente. Vi praecedentis correctionis dantur momenta appulſum cornu A, $5^h. 31'. 1\frac{1}{6}''$, et limbi Lunae B M A $5^h. 31'. 16\frac{1}{2}$, Lunae centro etiam in f haerente; vnde haec momenta inuenta talia ſunt, qualia obſeruata fuiſſent, ſi durante appulſuum obſeruatione limbus Lunae intra diſcum Solis immotus perſtitiſſet, puta in BMA.

Haec ergo momenta ſic correcta in conſtructione phaſeos ſupra expoſita adhiberi debent. Phaſis exinde conſtructa reſpondet momento temporis, quo motus Lunae quaſi cohibetur ſeu quo limbus Lunae in noſtro caſu fuit in B M A, ſcilicet $5^h. 30'. 45''$. Hoc momentum, ad quod phaſis propoſita conſtruitur, voco *momentum obſeruationis*.

Quoniam determinatio memoratarum correctionum a calculo et proiectione eclipſeos pendet, adeoque ex diſſenſu calculi cum coelo in conſtructa pro eruendis correctionibus figura poſitio Lunae intra diſcum Solis nonnunquam diuerſa prodire ſolet ab ea quam Luna ad datum tempus reuera reſpectu Solis habuit; methodo quidem praecedenti correctiones definiui, et phaſin ex obſeruationibus

nibus correctis construxi, ast vbi hanc ab ea, quam proiectio eclipseos indicabat, nimis discrepantem animaduerti, in constructa ex obseruationibus phasi correctiones denuo definiui, et exinde nouam phaseos constructionem ad veram magis appropinquautem suscepi.

Vt de phasibus praecipuis huius Eclipseos rationem reddam, obseruationes, ex quibus istae constructae sunt, hic transcribam, additis correctionibus methodo praecedenti erutis. Eligam autem prae ceteris obseruationes numeris, 4, 9, 10, 11, 15, in recensione superiori notatas, quibus praesertim diametrum Lunae determinaui.

Tempore horologii.

	Obseruat. 4.	Obseruat. 4. correcta
S ad —	5^h $28'$ $6''$	5^h $28'$ $6''$
B ad |	30. $21\frac{1}{2}$	30. $21\frac{1}{2}$
A ad |	30. 38	30. $37\frac{2}{3}$
periph. ☽ ad |	30. $54\frac{1}{4}$	30. 53
I ad —	32. $28\frac{1}{2}$	32. $28\frac{1}{2}$
C ad |	32. 43	32. 43

Momentum obseruationis B ad |
5^h $30'$ $21\frac{1}{2}$ horologii vel
5. 30. 45. temporis veri

Obser-

	Obſeruat. 9.	Obſeruat. 9. corect.
S ad —	5^h 56′ 43″	5^h 56′ 43″
A et B ad |	57. 40½	57. 40½
periph. ☽ ad |	58. 40½	58. 38½
C ad |	59. 29¼	59. 29¼
I ad —	6. 1. 6½	6. 1. 6½

Momentum obſeruationis B ad |
5^h 57′ 40½″ horologii vel
5. 58. 1. temporis veri

	Obſeruat. 10.	Obſeruat. 10. correct.
S ad —	6^h 2′ 35″	6^h 2′ 35″
A ad |	4. 8	4. 8
B ad |	4. 30	4. 29⅔
periph. ☽ ad |	5. 28	5. 26
C ad |	6. 2½	6. 2½
I ad —	7. 7	7. 7

Momentum obſeruationis A ad |
6^h 4′. 8″ horologii vel
6. 4. 26 temporis veri

	Obſeruat. 11.	Obſeru. 11. correct.
S ad —	6^h 14′. 35½″	6^h 14′. 35½″
periph. ☽ ad —	15. 5½	15. 8½
P ad |	15. 53	15. 53
A ad —	17. 41	17. 44¼
B ad —	17. 54	17. 54
C ad |	18. 27½	18. 27½

Momentum obſeruationis B ad —
6^h 17′. 54″ horologii vel
6. 18. 10 temporis veri

Obſer-

	Obſeruat. 15.	Obſeru. 15. correct.
S ad —	6^h 50.′ 29½″	6^h 50′. 29½″
P ad |	52. 24½	52. 24½
periph. ☽ ad |	53. 50	53. 52¼
A ad |	54. 2½	54. 3½
B ad |	54. 47	54. 47
I ad —	55. 12	55. 12

Momentum obſeruationis B ad |
6^h 54′. 47″ horologii vel
6. 54. 57 temporis veri

Deſignant hic S limbum Solis pro apparentia tubi aſtronomici ſuperiorem, I inferiorem, P praecedentem, C conſequentem. In obſeru. 4, 9, 10, 11, A eſt cornu phaſeos quoad apparentiam ſuperius B inferius; in obſeru. 15. vero A cornu ſecundum apparentiam inferius, B ſuperius (—) denotat filum in reticulo tubi quadrantis horizontale, (|) verticale.

Ex obſeruationibus iam expoſitis ſemidiameter Lunae deprehenſa eſt

ex obſeruat. 4 — 249
9 — 249½ partium ſcalae, qualium ſemi-
10 — 249¾ diameter Solis continet 267.
11 — 249½
15 — 251

Conſentiunt et aliae obſeruationes, quas hic breuitatis cauſa omiſi. Aſſumſi ergo pro media Lunae ſemidia-

 metro

metro 250, eamque ad tempus obſcurationis maximae retuli, quo altitudo Lunae viſa ſupra horizontem circiter erat 13°. Inde in hac altitudine prodit ratio diametri Solis ad diametrum Lunae vt 267 : 250. Ex tranſitu Solis per meridianum d. 4. Auguſti ſt. n. innotuit mora tranſitus diſci Solaris per horarium = 2'. 13½" temporis 1^{mi} mobilis. Inde habetur diameter Solis 31'. 51" in partibus circuli maximi; adeoque diameter Lunae in iisdem partibus = 29'. 49", et diameter Lunae horizontalis 29'. 42", quae ab ea 29'. 40", quam calculus ex tabulis Ludouicianis praedixerat, non niſi 2" differt. Si placeat ſecundum tabulas aſtronomicas aſſumere diametrum Solis 31'. 46"; prodibit diameter Lunae 29'. 44" in altitudine 13°; et diameter Lunae horizontalis 29'. 37".

Vt ex obſeruationibus, quas ab initio recenſui, deriuari poſſint tempora obſcurationum ſingulorum digitorum, in quos diuiſum concipiunt Aſtronomi diſcum Solis, neceſſe fuit, vt in ſemita centri Lunae viſa ex obſeruationibus ab initio poſitis reſpectu diſci Solaris definita (fig. 1.) cognoſcatur progreſſus Lunae ad ſingulos horae quadrantes. Per tantum enim temporis interuallum motus Lunae viſus absque errore ſenſibili vniformis haberi poteſt, cum caeteroquin motus Lunae in ſemita viſa ex variatione parallaxeos continuo mutetur, et in praeſenti caſu, Luna ad horizontem occiduum vergente, ſemper creſcat. Comparando ergo interualla locorum centri Lunae in ſingulis obſeruationibus ab initio poſitis cum interuallis temporis reſpondentibus, inueni, Lunam in 15. minutis primis temporis veri, dum Luna progreſſa eſt

ab

ab initio Eclipſis vsque ad obſeru. 4	- -		114	partium ſca-
ab obſeru. 4 vsque ad 9	- -		$117\frac{3}{4}$	lae, qualium
9 - - - - 11	abſoluiſſe ſpatium		$121\frac{1}{4}$	ſemidiame-
11 - - - - 15	- -		123	ter Solis con-
15 - - - finem	- -		127	tinet 267.

His cognitis et diuiſo Solis diſco in ſuos digitos, ope ſemidiametri Lunae in orbita eius viſa definiui loca centri Lunae, in quibus iſtud extitit, dum 1, 2, 3, 4, etc. digiti diſci Solaris obſcurati fuerunt. Innotuerunt ergo diſtantiae horum locorum in ſemita viſa a locis centri Lunae, quae ex obſeruationibus ab initio expoſitis iam cognita erant; vnde etiam ope motus horarii Lunae in ſemita viſa cognoſcebantur interualla temporum reſpondentia, adeoque ipſa temporis momenta, quibus ſinguli digiti obſcurati ſunt.

En deductiones hac methodo erutas,

Tempus verum				
5^h	10′.	49″	— — —	Initium Eclipſis
	16.	37	— — —	digitus 1
	22.	24	— — — — —	2
	28.	19	— — — — —	3
	34.	14	— — — — —	4
	40.	9	— — — — —	5
	46.	0	— — — — —	6
	51.	50	— — — — —	7
	57.	39	— — — — —	8

6.	3.	36	— — — — — 9
	10.	6	— — — — — 10
	16.	54	— — — — — 10. 34½′ obseruatio maxima, Distantia centrorum ☉ et ☽ minima, 2′ 46″ partium circuli max.
	23.	42	— — — — — 10
	30.	5	— — — — — 9
	35.	49	— — — — — 8
	41.	25	— — — — — 7
	46.	52	— — — — — 6
	52.	19	— — — — — 5
	57.	45	— — — — — 4
7.	3.	7	— — — — — 3
	8.	25	— — — — — 2
	13.	41	— — — — — 1
	18.	53	— — — — Finis Eclipsis.

OB-

OBSEVATIO
TRANSITVS LVNAE
AD
SATVRNVM

die $\frac{20.\ \text{April.}}{1.\ \text{Maii.}}$ an. 1740. Petropoli habita,

a

G. Heinsio.

Exacta motus Lunaris cognitio obseruatorum operam continuo requirit. Theoria quidem Lunae recentiorum studio certis superstructa est fundamentis, ex quibus variabilis Lunae motus diiudicari debet; sed data adhuc plurima, non nisi ex obseruationibus astronomicis petenda, desiderantur, vt illorum ope inaequalitates motus Lunaris à se inuicem probe discerni, earumque effectus sub certis Lunae circumstantiis cognosci possint. Hanc ob causam in obseruatorio Imperiali obseruationes Lunae tum in meridiano tum extra istum, quando Luna fixas vel planetas prope transit, assiduo instituuntur, vt sufficiens locorum Lunae numerus ex obseruationibus acquiratur, quae deinceps cum theoria conferri possint. Sed commodum hoc, quod obseruationes eiusmodi praebent, vnicum non est. Nexus, qui inter labores in obseruatorio Imperiali peragendos et molimina obseruatorum in Siberia et Camtschatka degentium intercedit, istas necessario requirit, vt ex comporatione locorum Lunae hic et in aliis locis obseruatorum, differentiae meridianorum determinari possint.

Vtilibus his obſeruationibus merito adnumero tranſitum Lunae ad Saturnum die $\frac{20\ \text{April.}}{1\ \text{Maii.}}$ an. 1740. hic obſeruatum, quem impraeſentiarum expoſiturus ſum.

In eius obſeruatione vſus ſum tubo 8. ped. in cuius foco extenſa erant quatuor fila ad angulos ſemirectos verſus ſe inuicem inclinata. Machina parallactica in ſitum debitum redacta ſuſtinebat tubum, qui in Lunam ita directus fuit, vt limbus Lunae pro apparentia tubi aſtronomici inferior (reuera ſuperior), dum tubum traiiciebat, exacte vnum ex filis iſtis in foco extenſis raderet, quod proinde diurnum Lunae apparentem referebat. Hoc apparatu obſeruaui appulſus limbi Lunae praecedentis et centri Saturni ad filum, quod diurno normaliter inſiſtebat et circulum horarium repraeſentabat, vt inde differentiae aſcenſionum rectarum limbi Lunae praecedentis et Saturni innoteſcerent. Praeterea vero annotaui quoque appulſus centri Saturni ad fila obliqua cum filis diurno et horario angulos ſemirectos formantia, vt exinde differentias declinationum limbi Lunae borealis et centri Saturni colligere poſſem. En deductiones ex obſeruationibus habitis.

Ordo obſer.	Temp. verum.	Differentiae Aſcens. rectarum limbi ☽nae praeced. et centri ♄ni in tempore primi mobilis	Differentiae declinationum limbi ☽nae borealis et centri Saturni exiſtente ♄no boream verſus ab hoc limbo, in partibus circuli maximi.
1.	$8^h. 14'. 34''$	$3'. 13\frac{1}{4}$	$15'. 36''$
2.	— 26. 44	2. $50\frac{3}{4}$	15 54
3.	— 34. 42	2. $36\frac{3}{4}$	16 25

4.

4. 8^h. 41$'$. 16$''$		2$'$. 24$\frac{3}{4}$		16$'$. 49$''$	
5. — 46 41		2. 15$\frac{1}{2}$		17. 20	
6. — 53 49		1. 59$\frac{1}{2}$		17. 27	
7. — 58. 36		1. 51$\frac{1}{2}$		18. 1	
8. 9. 4. 0		1. 40$\frac{1}{2}$		18. 16	
9. — 8. 9		1. 32$\frac{1}{2}$		18. 37	
10. — 12. 13		1. 24		18. 37	
11. — 16. 13		1. 16$\frac{1}{2}$		18: 51	
12. — 19. 53		1. 9$\frac{3}{4}$		19. 19	
13. — 35. 14		0. 39		20. 29	
14. — 38. 52		0. 32$\frac{1}{2}$		20. 36	
15. — 42. 2		0. 26$\frac{1}{4}$		20. 53	
16. — 44. 59		0. 20		21. 4	
17. 9 48. 10		0. 14		21. 11	

Saturnus nunc ad tantam à limbo Lunae boreali ſeptentrionem verſus diſtantiam peruenerat, vt fila obliqua reticuli non niſi prope marginem tubi traiiceret, quamobrem ab his obſeruationibus abſtinere debui.

Obſeruationes 5. et 7. quoad differentiam aſcenſionum rectarum limbi Lunae praecedentis et Saturni; obſeruationes vero 2, 6, 10, quoad differentias declinationum limbi borealis Lunae et Saturni, paulisper dubiae cenſendae ſunt.

DE

DE DECLINATIONVM SYDERVM DETERMINATIONE ABSQVE EXACTA ELEVATIONIS AEQVATORIS COGNITIONE.

G. *Heinsius.*

Quantum interſit, vt ſyderum declinationes et aſcenſiones rectae ex obſeruationibus aſtronomicis exactae determinentur, abunde conſtat. Altitudines ſyderum meridianae, habita eleuationis Aequatoris, refractionum, parallaxium ratione, declinationes; momenta culminationum ſyderum relata ad momentum tranſitus Solis per meridianum, aſcenſiones rectas ſuppeditant. Cum igitur praecipuum negotium reſpiciat obſeruationes ſyderum in Meridiano, Aſtronomi inſtrumentum altimetricum muro firmiter ita infigere ſolent, vt planum eius conueniat cum plano Meridiani, diuiſiones autem in limbo inſtrumenti exacte reſpondeant gradibus eleuationis obiecti ſuper horizonte. Hoc pacto facili negotio altitudo ſyderis meridiana obſeruari et ope horologii momentum tranſitus eius per Meridianum annotari poſſunt. Propoſitum meum non eſt, prolixam eiusmodi inſtrumenti deſcriptionem hic exhibendi; cogitata tantummodo quaedam proferam, quae declinationem ſyderis ope huiusmodi inſtrumenti inueſtigandam concernunt, ſic vt poſitio inſtrumenti reſpectu horizontis et eleuatio aequatoris exactiſſime cognitae non praeſupponantur.

Ex

Ex obſeruationibus Solis meridianis prope ſolſtitia hoc inſtrumento peragendis, inueſtigentur puncta diuiſionis in limbo inſtrumenti, quibus altitudines centri Solis ſolſtitiales, maxima aeſtate et minima hyeme reſpondent. Interuallum inter haec puncta in limbo inſtrumenti definiturum eſſet diſtantiam tropicorum; punctum vero medium huius interualli locum aequatoris in inſtrumento, ſi refractio altitudinibus ſyderum nullam mutationem induceret. Accedente refractione, differentia inter refractiones, quae altitudinibus Solis ſolſtitialibus, aeſtiuae et brumali, competunt, dicto interuallo addi debet, vt diſtantia tropicorum vera prodeat. Huius dimidium obliquitatem eclipticae exhibet, quae, ſi ab altitudine Solis ſolſtitiali aeſtiua per refractionem conuenientem correcta aufertur, in limbo inſtrumenti punctum manifeſtat, quod aequatori coeleſti reſpondet. Iam ſi in tranſitu alicuius ſyderis per meridianum, diſtantia eius ab hoc puncto obſeruetur, eique refractio, quae altitudini ſyderis obſeruati conuenit, applicetur, addendo, ſi declinatio ſyderis ſit auſtralis, ſubtrahendo, ſi borealis; habebitur vera ſyderis declinatio.

Videtur quidem haec methodus requirere altitudines ſyderum cognitas, adeoque poſitionem inſtrumenti reſpectu horizontis cognitam, vt ex altitudinibus refractio conueniens inueniri poſſit; quod etiam verum eſt de ſyderibus prope horizontem meridianum traiicientibus, vbi refractio ad exiguam altitudinis mutationem ſenſibiliter variatur. Aſt vbi ſydera vltra 10. vel 12. gradus cleuata meridianum tranſeunt, in quantitate refractionis parum peccabitur etiamſi altitudo ſyderis ad aliquot minuta incerta

 ſit,

ſit, ita, vt hoc modo altitudines ſyderum praeter propter ſcire ſufficiat. Hunc caſum praecipue reſpicio, cum prior caſus obſeruationis ſyderis ad horizontem tantis erroribus obnoxius ſit, vt iſtum Aſtronomi, quantum fieri poteſt, ſemper euitare ſtudeant.

Perſuaſum igitur habeo, in iis Terrae regionibus, in quibus altitudo ſolſtitialis brumalis 25 gradus ſuperat, hanc methodum probe ſucceſſuram eſſe; cum differentia refractionum, quae in hoc caſu altitudinibus ſolſtitialibus competunt, ſatis exacta habeatur, vt inde nullus error ſenſibilis in determinatione diſtantiae tropicorum verae exſurgat. Inueſtigatio autem declinationis ſyderis ex hac methodo reſultans ei praeſtare videtur, in qua eleuatio aequatoris et ſyderum altitudines meridianae exactae praeſupponuntur; ſaltem in iſta euitantur examina inſtrumentorum, quibus cognoſcere debemus an diuiſiones in limbo inſtrumenti gradibus altitudinis ſyderis ſuper horizonte recte reſpondeant; quae vero multis ſaepe difficultalibus praeſertim ſi inſtrumentum ſit praegrande vel muro iam infixum, premuntur, et ſubinde errores haud exiguos in definiendis altitudinibus producunt.

In iis regionibus, in quibus Sol tempore ſolſtitii brumalis parum ſuper horizonte in meridiano eleuatus conſpicitur, veluti in his terris; methodus hactenus expoſita non aeque ſuccedet, cum maiores et variabiles in vicinia horizontis refractiones determinationi diſtantiae tropicorum verae errores nimios inducere valeant. Econtrario ſi in his locis intrumentum murale in ſeptentrionali plaga extet vt opè iſtius ſtellae circumpolares in meridiano ſupra et

infra

infra polum obſeruari poſſint; methodo, praecedenti ſimili, locum in inſtrumento definire licebit, qui vero loco poli coeleſtis reſpondet; a quo deinceps diſtantiae ſyderum a polo, habita refractionum ratione, computari poſſint; vt adeo, absque exacta eleuationis Poli vel Aequatoris cognitione, ſyderum declinationes innoteſcant.

Cum in poſteriori hoc caſu inſtrumentum murale auſtralem coeli regionem reſpiciens non admittat exactam per altitudines Solis ſolſtitiales determinationem loci in inſtrumento, qui Aequatori coeleſti reſpondeat; cogitationes ſubortae ſunt, an non alia quaeuis Solis loca in inſtrumento obſeruata ad exactam iſtiusmodi loci Aequatori reſpondentis definitionem conducere poſſint. Differentiae Aſcenſionum rectarum et Declinationum Solis in tribus diuerſis Eclipticae locis exiſtentis huc facere videbantur.

Sint E C Ecliptica, E G aequator, in E punctum aequinoctiale, Sol autem primo in A deinceps in B et denique in C. Per A, B, C, intelligantur circuli declinationum A D, B F, C G; A *c* ſit circulus Aequatori parallelus: et erunt D F, D G differentiae Aſcenſionum rectarum; B *b*, C *c* differentiae Declinationum locis Solis B et A, C et A reſpondentium. Dentur iam dictae differentiae D F, D G, B *b*, C *c*; patebit via perveniendi ad determinationem Declinationis A D, Aſcenſionis rectae E D, et obliquitatis Eclipticae A E D. Aſſumendo enim expreſſiones incognitarum A D, E D et A E D, dabuntur expreſſiones arcuum E F, E G, B F, C G; et ex analyſi triangulorum ſphaericorum rectangu- Tab. XI. fig. 5.

 lo-

lorum A E D, B E F, C E G quaeſtio ad aequationem redigi poteſt. Calculum tentaui, qui vero tam prolixus et intricatus euaſit, vt nulla ſpes ſuperfuerit, eum conciſiorem reddendi et in vſum transferendi. Nec medela allata eſt, etiamſi obliquitatem Eclipticae A E D cognitam ſtatuerem, et ex differentia Aſcenſionum rectarum D F et differentia Declinationum B *b*, Declinationem A B et Aſcenſionem rectam E D quaererem.

Data, quae ad ſolutionem huius problematis requiruntur, per obſeruationes aſtronomicas admodum exacta haberi poſſe videntur. Obſeruando Solem per inſtrumentum murale in diuerſis limbi eius locis, ex horum interuallo differentiae declinationum immediate innoteſcunt, absque praeuia ſitus inſtrumenti reſpectu vel Horizontis vel Aequatoris cognitione. Cum autem neceſſe ſit, vt diuerſitatis refractionis, quae differentiae declinationum obſeruatae applicari debet, ratio habeatur: ſufficit altitudines meridianas Solis tempore obſeruationum praeterpropter ſcire, vt ope iſtarum differentiae refractionum conuenientes ex tabulis inueniri poſſint. Hae refractionum differentiae eo certiores ſunt, quo maiores ſunt altitudines Solis meridianae tempore obſeruationum, quas hic requiro; vt adeo certitudo differentiae declinationum quaeſitae ſolummodo pendeat ab exactitudine obſeruationis et bona inſtrumenti conſtitutione; quae requiſita in omnibus aliis obſeruationibus ſupponuntur. Differentiae Aſcenſionum rectarum Solis aeque exactae per obſeruationes acquiri poſſe videntur. Ex altitudinibus Solis reſpondentibus meridies verus certo inueſtigatur. Si tubus reticulo inſtructus in fi-

xam

xam claritate conſpicuam in quacunque coeli plaga (praeſtat prope Meridianum) extantem dirigatur, et in hoc ſitu ita firmetur, vt nullam poſitionis ſuae mutationem ſubire poſſit; ſingulis tunc fixae reuolutionibus etiam interdiu iſta per tubum memoratum obſeruari poterit. Dabitur ergo per obſeruationes interuallum temporis inter tranſitum Solis per Meridianum et tranſitum fixae per reticulum ſui tubi. Si iam eiusmodi interualla diuerſis diebus notata inter ſe comparentur, innoteſcet, quantum Sol interea ad fixam acceſſerit vel ab ea receſſerit in Aequatore, hoc eſt, dabuntur Differentiae Aſcenſionum rectarum Soli temporibus obſeruationum, competentium.

Cum tantam in acquiſitione datorum, quae praecedens problema requirit, facilitatem et certitudinem animaduerterem; ipſum vero problema calculum aptum non admitteret; iſtud paululum mutaui, vt tractabilius euaderet. Introduxi ſcilicet iter a Sole in Ecliptica confectum ab vna obſeruatione vsque ad alteram. Sint, vt ante, E C Ecliptica E G aequator, E punctum aequinoctiale, Fig. 6. Sol primo in A, deinde in C obſeruatus; A D, C G circuli declinationum in polo aequatoris P concurrentes; C *c* differentia declinationum, D G differentia aſcenſionum rectarum, vtraque per obſeruationes data. Suppoſui ergo, dari quoque arcum Eclipticae A C, quem Sol ab vna obſeruatione vsque ad alteram emenſus eſt Hoc ſuppoſitum quidem non admittendum eſſe prima fronte videtur, cum theoriam Solis requirat adeoque hypoteſin obſeruationibus immiſceat. Attamen re perpenſa credidi, parum peccari poſſe in determinatione quantitatis arcus A

 C,

C, vt istum absque periculo erroris nimii supponere liceret. Ponamus enim Solem aequabili motu per Eclipticam ferri; et manifestum est, ex interuallo temporis inter obseruationes Solis in A et C exacte haberi posse arcum A C, ob tempus periodicum Solis datum. Cum Sol in Ecliptica vniformiter non moueatur, motus eius aequabilis seu medius, cuius quantitas ex dato tempore cognoscitur, corrigi solet per aequationes centri Solis, ita vt motus Solis verus per A C innotescat ex motu eius medio (tempori, quo Sol ex A in C peruenit, respondente) comparato cum differentia aequationum centri Solis locis eius in A et C competentium. In determinatione motus medii ex dato tempore parum vel nihil peccari potest. Quod ad differentiam aequationum centri locis Solis in A et C conuenientium, in ista parum quoque errari posse credo. Aberrent enim loca Solis per tabulas astronomicas computata aliquot minutis a locis, in quibus Sol tempore obseruationum reuera versatus est; haec tamen aberratio exiguum errorem producet, cum variatio aequationis variationi vnius Gradus in anomalia media respondens nondum ad 2. minuta ascendat, si maxima sit; vt adeo aequatio loco Solis ex calculo cempetens parum differe possit ab aequatione quae loco Solis in celo respondet, praesertim in illis casibus, in quibus aequatio per vnum anomaliae mediae gradum lente variatur. Differentia ergo aequationum ex tabulis parum discrepare debet a differentia aequationum, quae locis Solis in A et C reuera respondent. Imo cum quaestio ad differentias reducta sit, error exiguus ad modum erit etiamsi in situ Apogaei et magnitudine excentricitatis orbitae Solaris tabulae

astro-

aſtronomicae a ſe differant; quo caſu quidem ipſae centri Solis aequationes in vna tabula diuerſae erunt ab homologis aequationibus in altera tabula; differentia tamen duarum aequationum in vna tabula non multum abludet a differentia aequationum homologarum in altera, cum homologae aequationes ſimiliter fere varientur in orbitis eclipticis, quarum Excentricitates non multum a ſe inuicem diſcrepant prouti fit in ſpecie orbitae Solaris iuxta diuerſas tabulas conſiderata. Rem exemplum infra declarabit.

Detur ergo per tabulas aſtronomicas arcus eclipticae A C, quem Sol ab vna obſeruatione vsque ad alteram peragrauit. Dentur praeterea ex obſeruatione differentia Declinationum C c et differentia aſcenſionum rectarum D G ſeu angulus D P G vel A P C; et quaeſtio huc reducta erit, vt in trangulo Sphaerico A P C, ex datis arcu A C, angulo A P C, et differentia laterum A P, P C, quae eſt C c, inueniatur latus P C complementum declinationis C G quaeſitae: quo P C dato inueniri quoque poteſt angulus P C A, eiusque complementum ad duos rectos E C G, ex quo et declinatione inuenta C G in triangulo E C G ad G rectangulo innoteſcent, obliquitas Eclipticae C E G, aſcenſio recta E G, longitudo Solis E C:

Pro ſolutione problematis praecedentis ſint

A C $= a$	P C $= x$
C $c = b$	P A $= x + b$
APC ſeu P $= p$	P A + P C $= 2x + b$
	P A − P C $=$ C $c = b$

Iam

Iam per theorema Cl. Euleri in Tom. IV. Comment. p. 98. posito sinu toto $=1$, est

$$\text{cos. AC} = \frac{\text{Cos.}(PA+PC) + \text{cos.}(PA-PC) + \text{cos. P. cos.}(PA-PC) - \text{cos. P. cos.}(PA+PC)}{2}$$

seu introductis symbolis

$$\cos. a = \frac{\cos.(2x+b) + \cos. b + \cos. p . \cos. b - \cos. p . \cos.(2x+b)}{2}$$

Facta ergo terminorum transpositione inuenitur

$$\cos.(2x+b) = \frac{2 . \cos. a - \cos. b - \cos. p . \cos. b}{1 - \cos. p}$$
$$= \frac{2 . \cos. a - \cos. b - \cos. p . \cos. b}{\sin. \text{vers}. p.}$$

vt hoc problema exemplo illustrarem, elegi obseruationes Solis et Sirii diebus 26. Aprilis et 24. Maii stylo nouo anno 1740. institutas. Transitum Solis per meridianum ex altitudinibus eius respondentibus determinaui; Sirium vero obseruaui in sextante murali, nulla habita ratione, an tempus transitus Sirii per reticulum huius instrumenti conueniat cum tempore culminationis eius verae, nec ne d. 26. Aprilis deprehendi interuallum inter meridiem verum et transitum Sirii per sextantem muralem $4^h\ 17'\ 32''$ temporis primi mobilis d. 24. Maii istud interuallum inveniebatur $2^h\ 28'\ 16\frac{1}{2}''$ temporis primi mobilis. Differentia igitur horum interuallorum est $1^h\ 49'\ 15\frac{1}{2}''$, cui respondet arcus Aequatoris $27°\ 18.\ 52'' =$ DG seu ang. APC, si Sol d. 26. Aprilis in A, d. 24. Maii in C extitisse ponatur, d. 26. Aprilis altitudinem limbi superioris Solis in Sextante murali notaui $43°\ 59'\ 45''$; d. 24. Maii, $51°\ 10'\ 52''$, non attendendo, an hae altitudines sint iustae, an vero propter aberrationem instrumenti a situ horizontali correctione aliqua indigeant. Prodit inde differentia declinationum $7°\ 11'\ 7''$ cui propter differentiam refractionum et mutatam Solis semidiametrum addi-

uebent

debent 17″, vt vera declinationum differentia prodeat 7° 11′ 24″ = C*c*. Differentiam parallaxium Solis quippe insensibilem hic neglexi.

Pro arcu AC obtinendo, quem Sol a meridie vero d. 26. Aprilis vsque ad meridiem verum d. 24. Maii in Ecliptica emensus est, computum ex tabulis tum *de la Hire*, tum *Cassini* institui. Ex prioribus inueni locum Solis medium d. 26. April: meridie vero Petropoli 1ˢ 4° 41′ 11″ et d. 24. Maii 2ˢ 2° 17′ 2″; vnde motus Solis medius interea factus est 27ᵇ 35′ 51″. Aequatio centri Solis d. 26. April. erat 1° 42′ 53″ addit. et d. 24. Maii 1° 7′ 21″ addit.; hinc differentia aequationum prodit = 35′ 32″, quae ex motu medio 27° 35′ 51″ subducta relinquit motum Solis verum seu arcum AC = 27° 0′ 19″. Ex tabulis *Cassini* ad meridiem verum Petropoli d. 26. April. deprehendi locum Solis medium 1ˢ 4° 41′ 12″; d. 24. Maii 2ˢ 2° 17′ 10″ quapropter motus Solis medius interea factus est 27° 35′ 58″. Aequatio centri Solis loco priori respondebat 1° 43′ 44″, loco posteriori 1° 7′ 30″ vtraque additiua. Si differentia aequationum 36′ 14″ auferatur ex motu medio 27° 35′ 58″, restat motus Solis verus seu arcus AC = 26° 59′ 44″. Occurrit ergo in determinatione arcus AC ex tabulis *de la Hire* et *Cassini* differentia 35″, quae tolerari posse videtur, vt autem eo minus a vero aberrem, inter vtrumque arcus AC valorem accepi medium 27° 0′ 2″. Ex hoc ergo computu dantur

C*c* seu $b = 7° 11′ 24″$. Cosin. $b = 9921365$
ang. P seu $p = 27° 18′ 52″$. Cos. $p = 8885015$
Sinus. versus $p = 1114984$
AC seu $a = 27° 0′ 2″$. Cos. $a = 8910021$

 Hinc

Hinc $2.\ \text{cos}.\ a = 17820042$

$2.\ \text{cos}.\ a - \text{cos}.\ b = 7898677$

$\text{cos}.\ b\ .\ \text{cos}.\ p = 8815148$, si sinus totus $= 1$.

Quapropter, si hi valores substituantur in formula

$$\text{cos}.\ (2x + b = \frac{2.\ \text{cos}.\ a - \text{cos}.\ b - \text{cos}.\ p.\ \text{cos}.\ b}{\text{Sin. vers}.\ p}$$

prodibit $\text{cos}.\ (2x + b) = \frac{-916471}{1114534} \times \text{Sin. tot.}$ (seu 10000000)

$$-\text{cos}.\ (2x + b) = 8219589$$
$$= \text{sin}\ 55^\circ.16'.53''\ \text{vel cos}.\ 34^\circ.43'.7''$$

Igitur ob cos. $(2x + b)$ negatiuum, erit

$2x + b =$ Complemento $34^\circ.\ 43'.\ 7''$ ad duos rectos

$= 145^\circ.\ 16'.\ 53''$.

et $x = 69^\circ.\ 2'.\ 44\tfrac{1}{2}'' =$ P C seu distantiae Solis a polo d. 24. Maii; vnde hoc die declinatio centri Solis inuenitur $20^\circ.\ 57'.\ 15\tfrac{1}{2}''$.

Vt innotescat, quantum declinatio sic inuenta conueniat cum declinatione methodo ordinaria definita, ex supposita Aequatoris eleuatione et altitudine Solis meridiana d. 24. Maii per idem instrumentum murale obseruata adhibitis debitis correctionibus, declinationem Solis inuestigaui quam $20^\circ.\ 53'.\ 12''$. inueni, quae a priori $4'.\ 3\tfrac{1}{2}''$. differt. Vnde tanta discrepantia? De posteriori declinatione certus sum, in illa errorem locum habere non posse, qui ad dimidiam minuti partem ascendat. E contrario de certitudine Datorum et calculi, ex quibus declinatio prior innotuit, nullus quoque scrupulus superest. Cogitationes igitur subortae sunt, an non ex erroribus illis exiguis, a quibus obseruationes, etiamsi omnis cura adhibeatur, liberari nequeunt, tantus denique error conflatus sit.

Vt hac de re certus fierem, exemplum elegi, in quo quaesitum iam constabat. Data huius exempli deinceps paululum mutaui, eaque talia effeci, qualia prodire pos-

possent, si ipsis errores, qui in obseruationibus committi queunt, adhaererent. Ea, quae exinde resultabant, denique comparaui cum quaesito iam cognito, vt innotesceret, quantus error in quaesito per errores obseruationum produci posset. Sint in A 20° ♈, in C 24° ♉. Ex tabulis igitur astronomicis erunt $ED = 18°.\ 27'.\ 37''$, $EG = 51°.\ 36'.\ 55''$, $AD = 7°.\ 50'.\ 0''$, $CG = 18°.\ 48'.\ 25''$, vnde AC seu $a = 34°$, DG seu $p = 33°.\ 9'.\ 18''$, Cc seu $b = 10°.\ 58'.\ 25''$; quaesitum autem PC seu $x = 71°.\ 11'.\ 35''$. Tantus praecise arcus PC quoque prodit, si ex datis a, b, p, iuxta problema superius quaeritur. Cogitemus iam b et p ex obseruationibus; a vero ex tabulis Solaribus desumta esse. Ponamus in p seu ang. A P C per obseruationes errorem vnius minuti commissum esse, quod facile fieri potest. Si enim in obseruatione meridiei peccetur vno secundo temporis et in obseruatione fixae itidem vno secundo error in interuallo harum obseruationum ad $2''$, assurgere potest. Duo iam eiusmodi interualla inter meridiem et obseruationem fixae requiruntur pro determinando angulo A P C; quapropter si alteri interuallo etiam errorem $2''$ adscribamus, in determinationem anguli A P C error $4''$ irrepere valet, qui in quantitate anguli A P C errorem vnius minuti producit. Ponamus porro in b seu in differentiam declinationum Cc per obseruationes introductum esse errorem $20''$, quod fieri posse patet, cum ad determinationem ipsius Cc requirantur duae obseruationes quarum quaelibet errori $10''$ subiecta est. Denique in quantitate ipsius a ex tabulis Solaribus desumta facillime error $30''$ locum habere potest.

Introducantur iam hi errores suppositi in data superiora et fiant.

$a =$

$$a = 34^\circ.\ 0'.\ 30''.$$
$$b = 10.\ 58.\ 5.$$
$$p = 33.\ 10.\ 18.$$

quibus factis inuenietur P C seu $x = 71^\circ.\ 9'.\ 26\frac{1}{2}''$, qui a vero arcus P C valore differt $2', 8\frac{1}{2}''$.

Ponantur $a = 33^\circ.\ 59'.\ 30''.$
$$b = 10.\ 58.\ 5.$$
$$p = 33.\ 10.\ 18.$$

et deprehendetur $PC = 71^\circ.\ 1'.\ 50\frac{1}{2}''$, qui a vero eius valore discrepat $9'.\ 44\frac{1}{2}''$.

Et hac ratione combinando errores cum Datis superioribus hoc vel illo modo plures suppositiones fieri possunt, quas vero vlteriori calculo prosequi non opus esse iudico. sufficit hoc exemplo indicasse, problema nostrum ita comparatum esse, vt committendo exiguos errores in Datis ingens error in Quaesito exsurgat. Plura eius modi problemata in astronomicis occurrere solent, quae iuxta theoriam quidem vsum eximium spondent, in applicatione vero ad exempla omni vsu destituuntur, dum errores exiguos exaggerant. Astronomia per eiusmodi theorias parum prouehitur, et omnino interest, vt propositiones istius conditionis innotescant. Examinanda sunt problemata et ista seligenda, quae errores ab obseruationibus inseparabiles magis magisque imminuunt. Ratio huius scripti inde patet; et facile nunc persuasum habeo, problema superius, quo ex datis differentiis Ascensionum rectarum et Declinationum Solis Ascensiones rectae et Declinationes ipsae inueniri debent, quoque calculum respicit, vsum denegaturum esse, etiamsi, quocunque artificio, elegans et concisa formula algebraica pro solutione istius exhiberi posset.

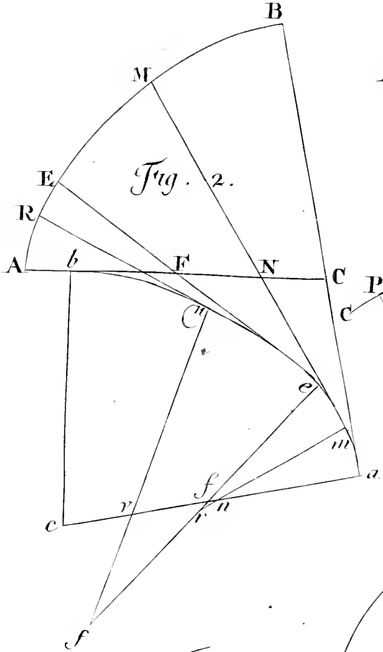


Fig. 2.

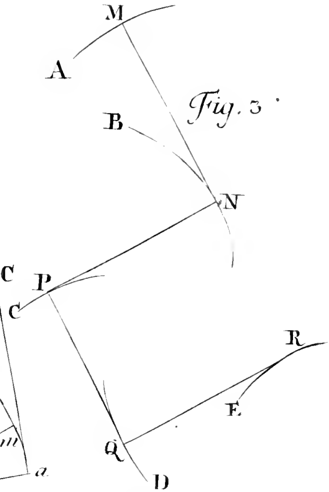


Fig. 3.

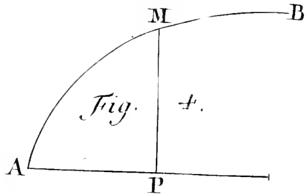


Fig. 4.

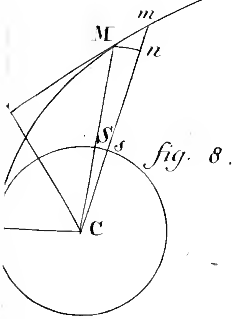


fig. 8.

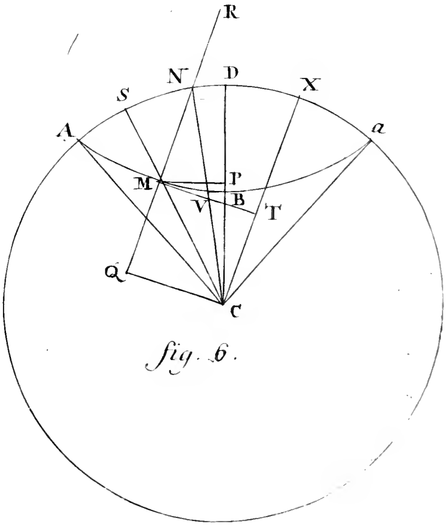


fig. 6.

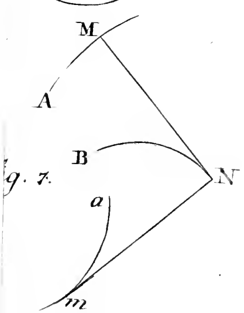


fig. 7.

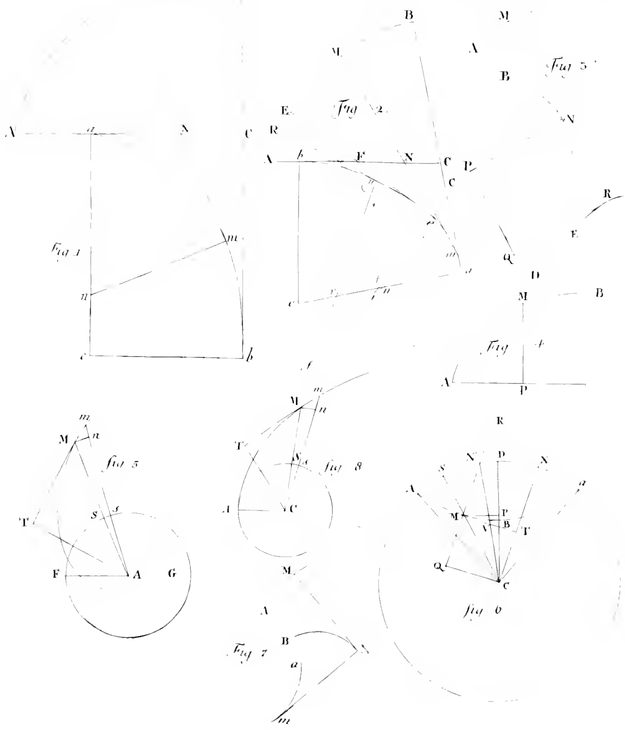


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
fig. 5
fig. 6
Fig. 7
fig. 8

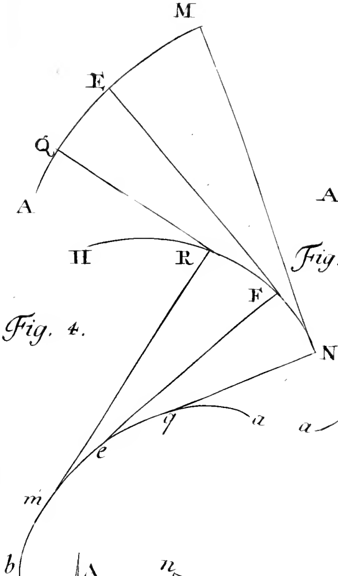


Fig. 4.

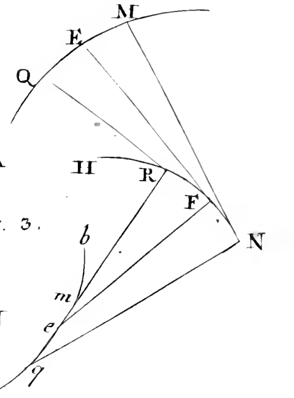


Fig. 3.

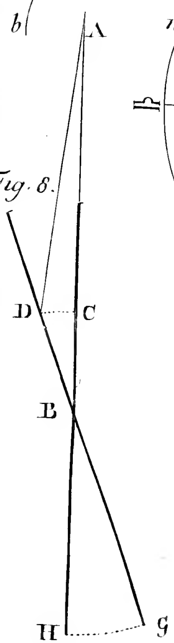


Fig. 8.

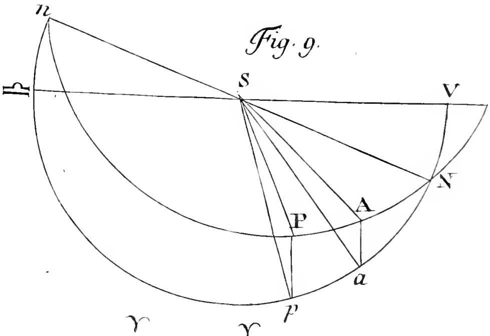


Fig. 9.

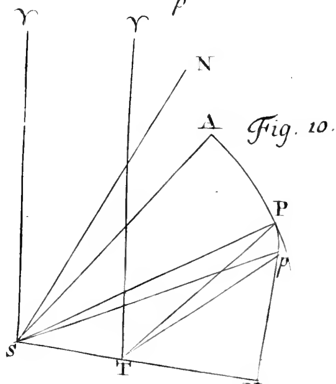


Fig. 10.


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10

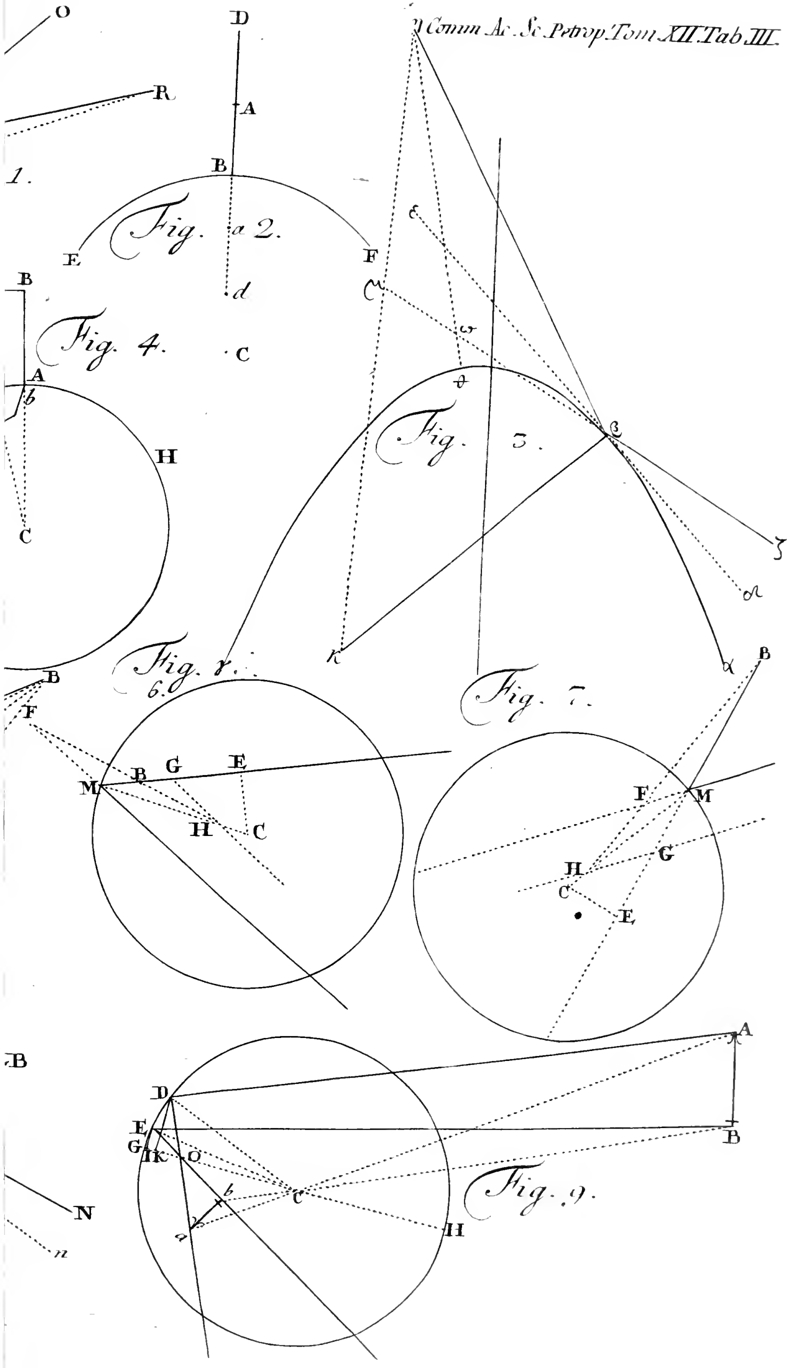


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
6.
Fig. 7.
Fig. 9.

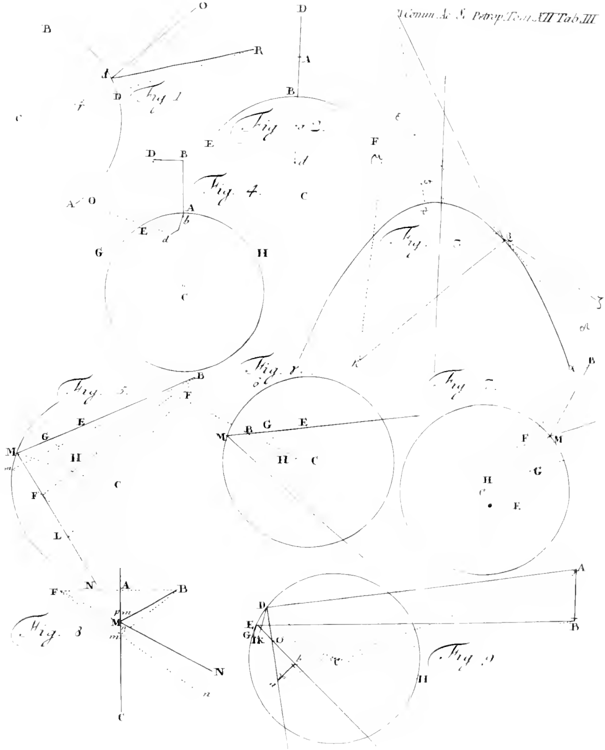


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 8
Fig. 9

ig. 1.

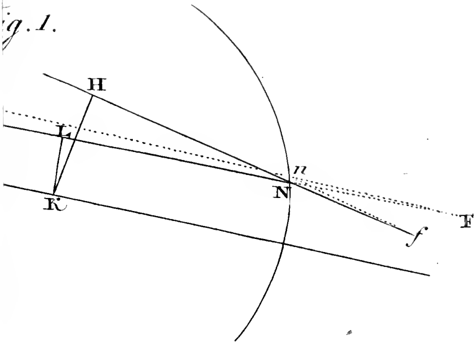
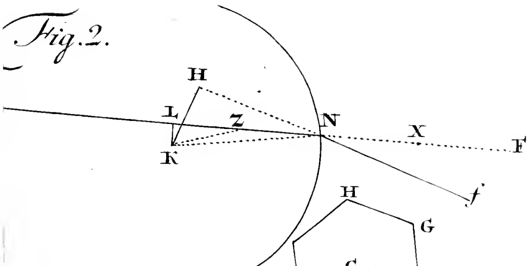


Fig. 2.



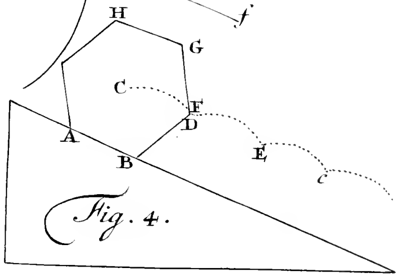
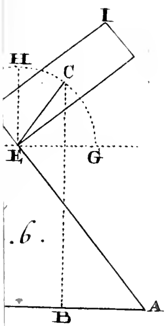


Fig. 4.



.6.

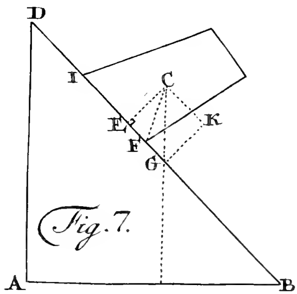


Fig. 7.

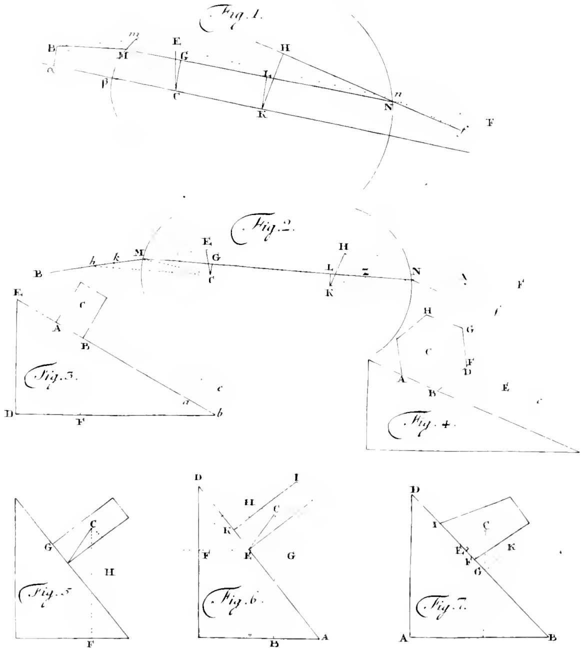


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

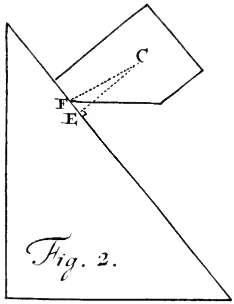


Fig. 2.

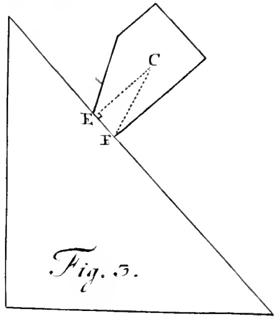


Fig. 3.

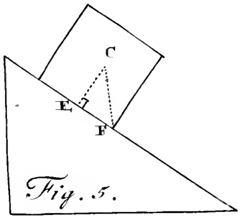


Fig. 5.

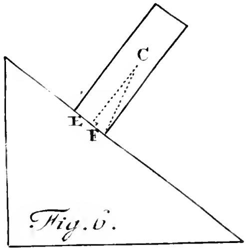
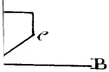


Fig. 6.



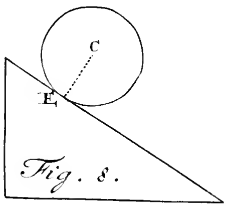


Fig. 8.

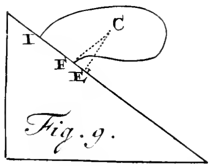


Fig. 9.

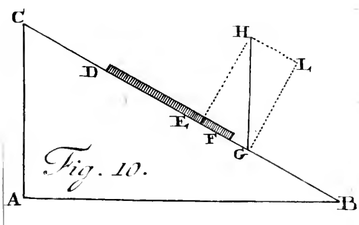
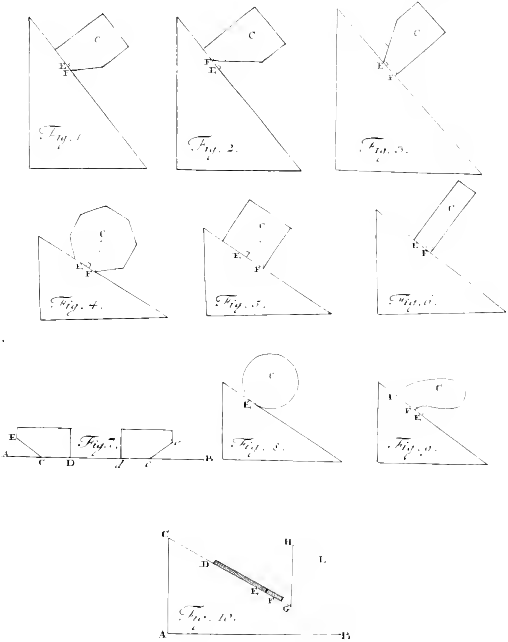


Fig. 10.


C
E
F
Fig. 1.
C
F
E
Fig. 2.
C
E
F
Fig. 3.
C
E
F
Fig. 4.
C
E
F
Fig. 5.
C
E
F
Fig. 6.
E
A
C
D
Fig. 7.
d
c
e
B
C
E
Fig. 8.
C
F
E
Fig. 9.
C
H
L
D
E
F
G
Fig. 10.
A
B

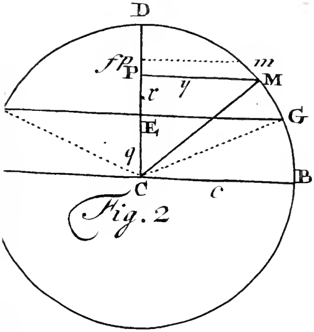


Fig. 2

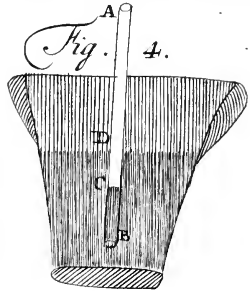
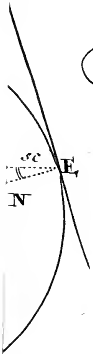


Fig. 4.



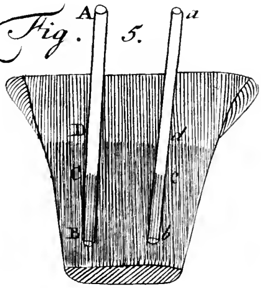


Fig. 5.

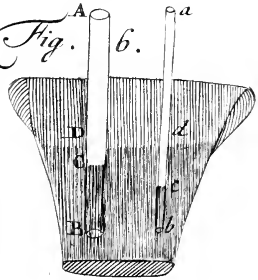
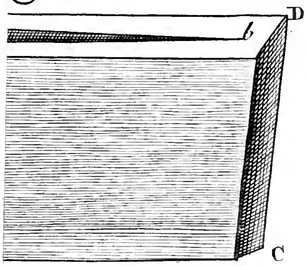


Fig. 6.

Fig. 8.



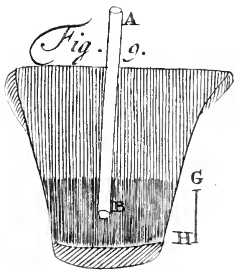
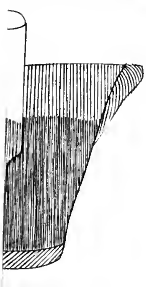


Fig. 9.



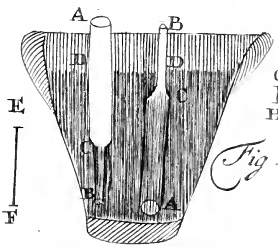


Fig. 11.

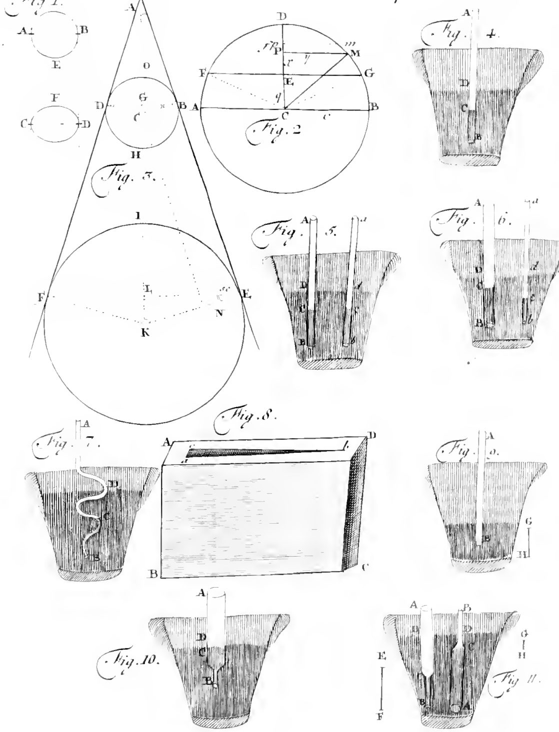


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

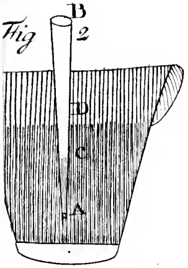


Fig 2

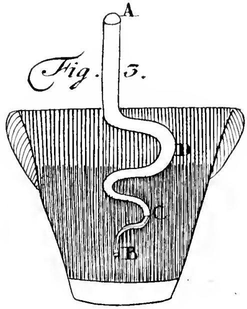


Fig. 3.

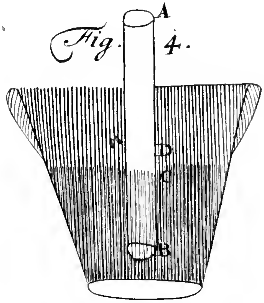
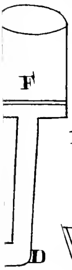


Fig. 4.



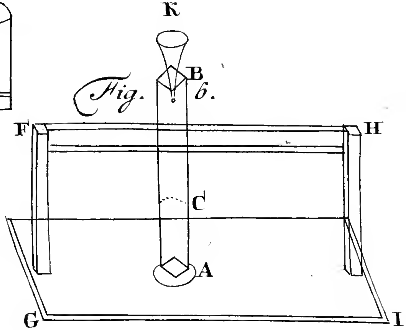


Fig. 6.

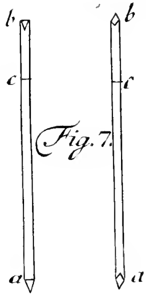


Fig. 7.

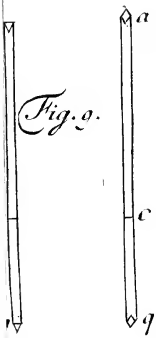


Fig. 9.

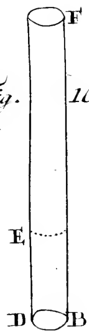


Fig. 10

Fig. 11.

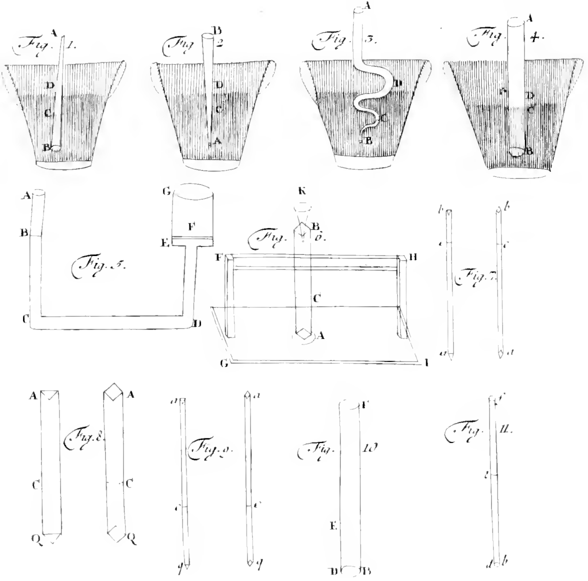


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.

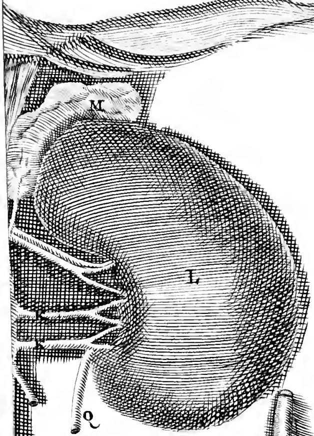


Fig. 2.

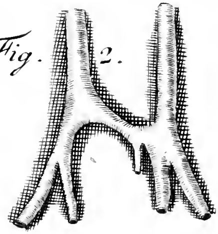


Fig. 3.

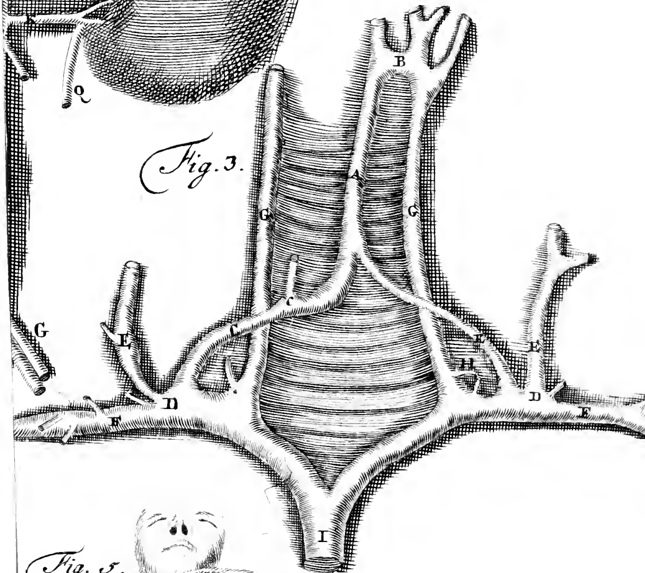
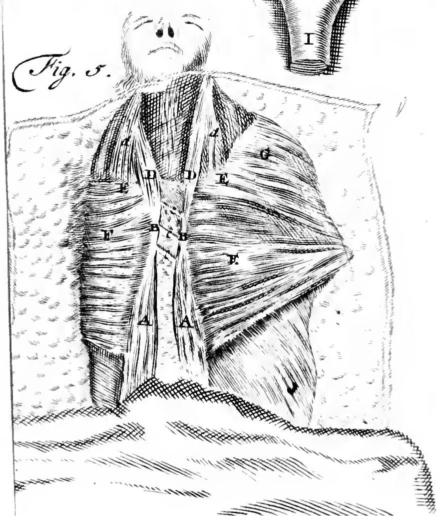


Fig. 5.



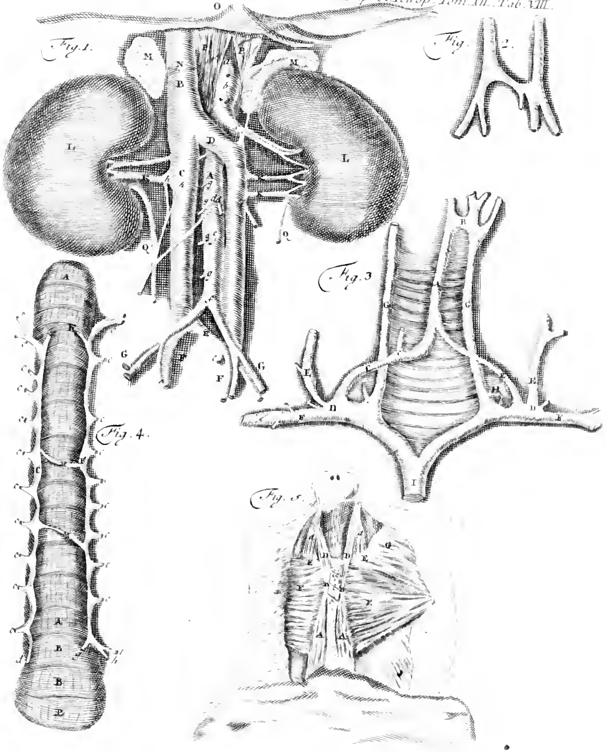


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5.

Fig. 2.

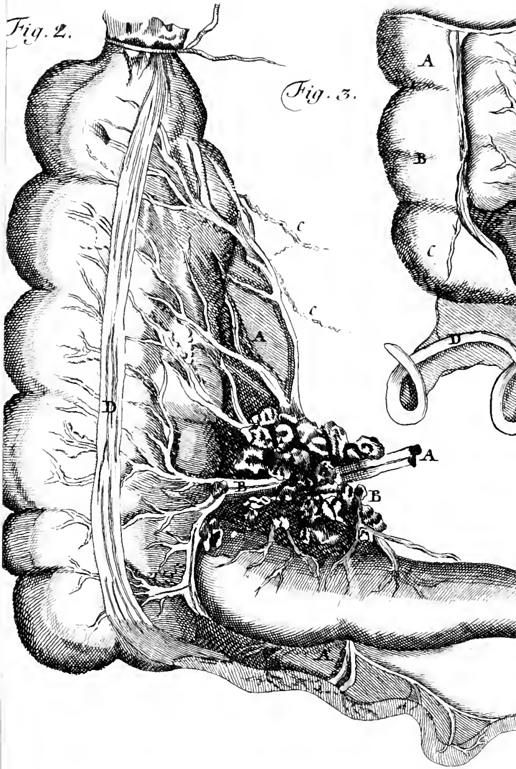


Fig. 3.

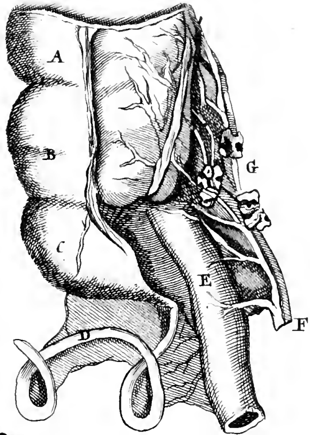
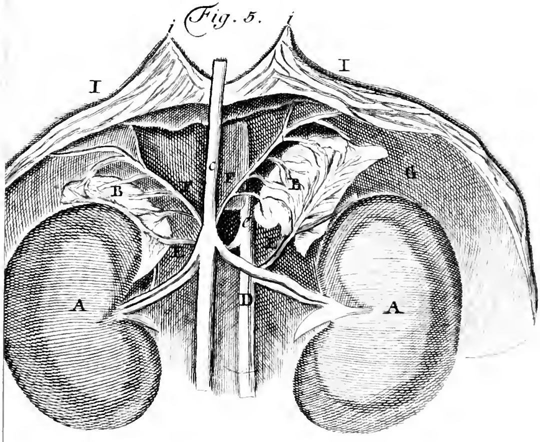


Fig. 5.



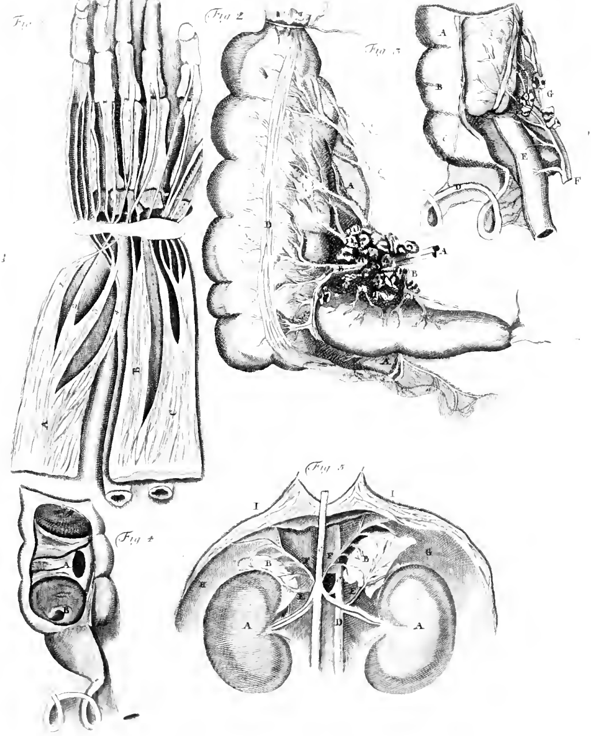


Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5

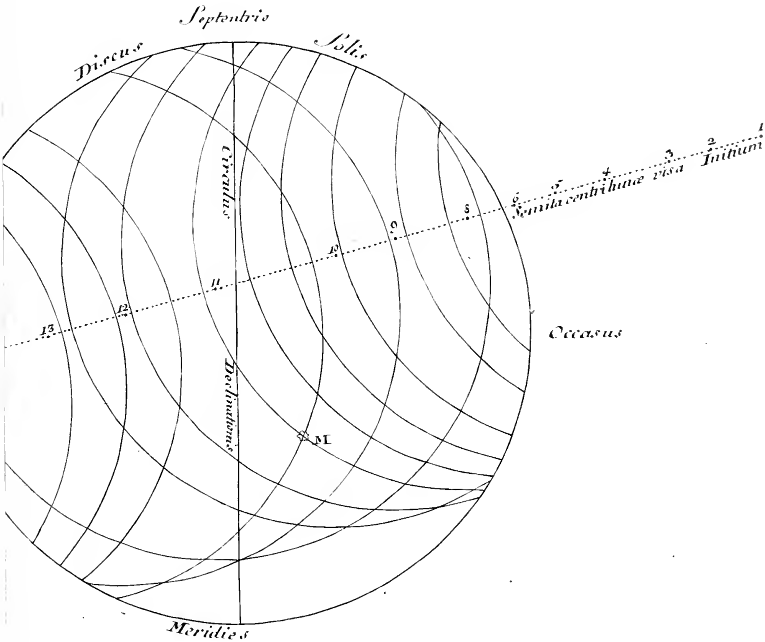
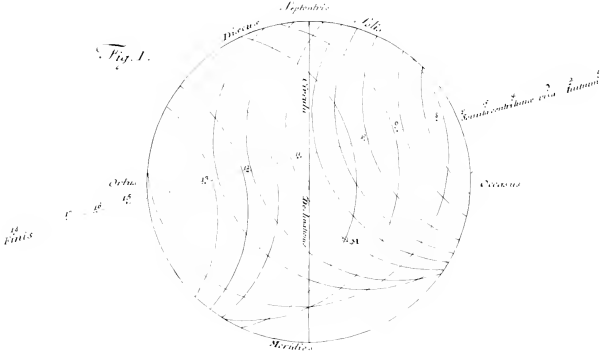
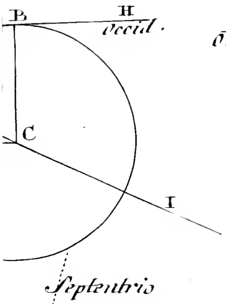

Septentrio
Discus
Solis
Circulus
Declinationis
Semita centri lunae visa
Initium
1
2
3
4
5
6
8
9
10
11
12
13
M
Occasus
Meridies

Fig. 1.


Septentrio
Discus
Solis
Circulus
Declinationis
Semita centri lunae circa
Initium
Ortus
Occasus
Finis
Meridies



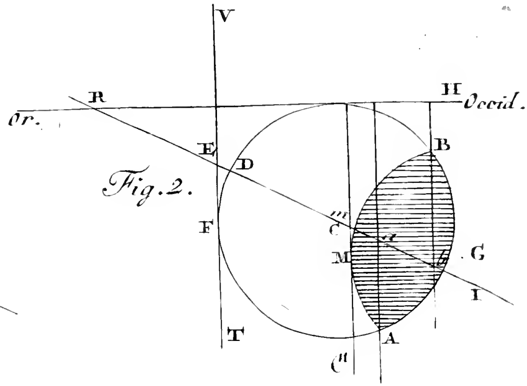
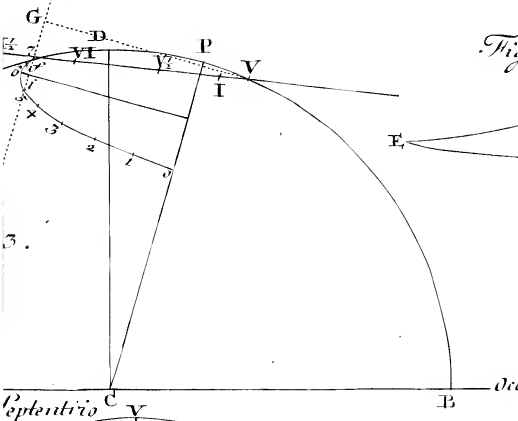


Fig. 2.



3.

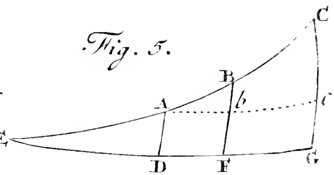


Fig. 5.

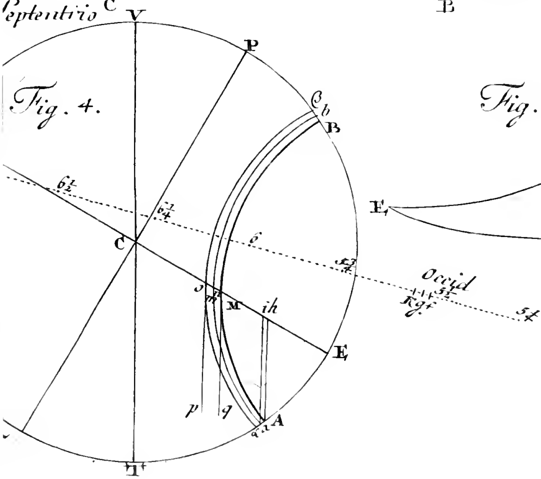


Fig. 4.

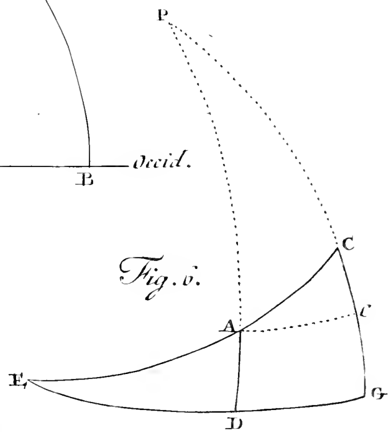
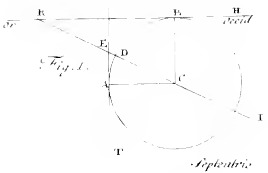
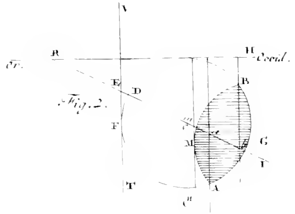


Fig. 6.


V
R
B
H
Or.
Occid.
E
D
Fig. 1.
A
C
I
T
Septentrio


V
R
H
Or.
Occid.
E
D
B
Fig. 2.
F
M
G
I
T
A

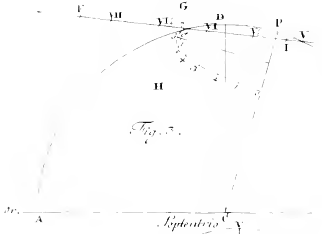
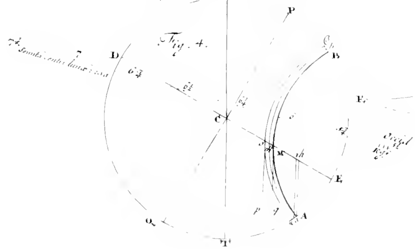

F
VII
G
VI
D
P
V
I
H
Fig. 3.
Or.
A
C
B
Occid.
Septentrio


Fig. 5.
C
B
A
E
D
F
G
P


V
P
Fig. 4.
D
B
C
M
E
Q
T
A

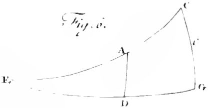


Fig. 6.
C
A
E
D
G
Occid.